

УДК 528.28; 528.2; 528:629.78

АСТРОНОМИЯ, ГРАВИМЕТРИЯ И КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

О ПРИМЕНЕНИИ ВЕЙВЛЕТОВ АБЕЛЯ–ПУАССОНА ДЛЯ АНАЛИЗА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ЛОКАЛЬНОМ РАЙОНЕ

©2017 Л.С. Сугаипова

Московский государственный университет геодезии и картографии, Россия
leyla_sugaipova@mail.ru

Аннотация. Приведены краткие сведения о масштабирующих функциях и вейвлетах. Получены выражения для возмущения и аномалии силы тяжести от масштабирующих функций и вейвлетов Абеля–Пуассона. Описан алгоритм отбора наиболее эффективных полюсов сферических радиальных базисных функций (СРБФ) на основе геометрической интерпретации ортогонального метода наименьших квадратов. Численный эксперимент демонстрирует применение полученных формул.

Ключевые слова: масштабирующая функция, вейвлет, полюс сферической радиальной базисной функции, аномалия силы тяжести, вейвлет-анализ

ON APPLICATION OF ABEL-POISSON WAVELETS FOR THE ANALYSIS OF GRAVITY IN THE LOCAL AREA

©2017 Sugaipova L.

Moscow State University of Geodesy and Cartography, Russia
leyla_sugaipova@mail.ru

Abstract. A brief overview on scaling functions and wavelets are provided. Expressions for gravity disturbance and gravity anomaly of the scaling functions and Abel-Poisson wavelets are derived. The algorithm of selection of the most effective poles of the spherical radial basic functions (SRBF) on the basis of geometrical interpretation of orthogonal least-squares method is described. The numerical experiment demonstrates application of the received formulas.

Keywords: Scaling function, wavelet, pole of spherical radial basis function, gravity anomaly, wavelet analysis

Вводные сведения. Как известно, скалярное поле $f(r, \theta, \lambda)$ на сфере ω_R радиуса R и вне её можно представить следующей суммой ряда по шаровым функциям сферических координат (r, θ, λ) :

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{k=0}^n (c_{nk} \cos k\lambda + s_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\cos \theta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь c_{nk}, s_{nk} — гармонические коэффициенты; P_{nk} — нормированные присоединённые функции Лежандра n -й степени и k -го порядка; $\sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) = Y_n(\theta, \lambda)$ — нормированная сферическая функция n -й степени,

$$a_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda) = \begin{cases} c_{nm} \cos m\lambda P_{nm}(\cos \theta), & m = 0, 1, 2, \dots, n; k = m; \\ s_{n|m|} \sin |m| \lambda P_{n|m|}(\cos \theta), & m = -n, \dots, -2, -1; k = -m. \end{cases}$$

Коэффициенты a_{nm} определяются интегралами

$$a_{nm} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\omega_R} f(R, \theta, \lambda) Y_{nm}(\theta, \lambda) d\omega_R = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega_1} f(R, \theta, \lambda) Y_{nm}(\theta, \lambda) d\omega_1, \quad (2)$$

где $d\omega_R = R^2 \cos \theta d\theta d\lambda$.

Пользуясь интегральным выражением указанных коэффициентов и известной теоремой сложения сферических функций

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\theta, \lambda) Y_{nm}(\theta', \lambda'), \quad (3)$$

преобразуем ряд (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\omega_R} f(Q) Y_{nm}(Q) d\omega_R Y_{nm}(P) = \\ &= \int_{\omega_R} f(Q) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(Q) Y_{nm}(P) d\omega_R = \int_{\omega_R} f(Q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi) d\omega_R. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $P(\theta, \lambda)$ — проекция точки вычисления (r, θ, λ) на сферу; Q — текущая точка сферы; ψ — сферическое расстояние между точками P и Q ; $P_n(\cos \psi) = P_n(v)$ — ненормированный полином Лежандра; $v = \cos \psi$.

Видно, что функция двух точек

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi) = K(P, Q) \quad (5)$$

играет роль воспроизводящего ядра гильбертова пространства $L_2(\Omega_R)$ функций на и вне сферы ω_R , поскольку, согласно (4),

$$\int_{\omega_R} K(P, Q) f(Q) d\omega_R = K(P, Q) * f(Q) = f(P),$$

где знак * обозначает свёртку на сфере.

Можно доказать, что при $r=R$ выражение (5) представляет собой так называемую обобщённую δ -функцию Дирака такую, что

$$\delta(P, Q) = \begin{cases} 0, & \text{если } P \neq Q; \\ \infty, & \text{если } P = Q; \end{cases} \quad \int_{\omega_R} \delta(P, Q) f(Q) d\omega_R = f(P). \quad (6)$$

Эта функция не удовлетворяет требованиям, определяющим воспроизводящее ядро гильбертова пространства, и $L_2(\Omega_R)$ нельзя считать гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, так как оно содержит недостаточно гладкие функции.

Чтобы исправить это положение и получить возможность пользоваться свёрткой для фильтрации сигнала и разного рода аппроксимаций, вместо дельта-функции (6) будем рассматривать на единичной сфере следующую функцию сферического расстояния ψ между точками P и Q :

$$\Phi_{\varphi_j}(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_j(n) P_n(v) = \Phi_{\varphi_j}(v), \quad v = \cos \psi. \quad (7)$$

Выражение (7) называется *масштабирующей функцией* на единичной сфере, если выполняются следующие условия [1, р. 190, 194]:

1) неотрицательная числовая последовательность $\varphi_j(n)$ монотонно убывает по n и монотонно возрастает по j , то есть для всякого $j=0, 1, \dots$ имеет место неравенство $\varphi_j(n+1) < \varphi_j(n)$, $n=0, 1, \dots$ и для всякого $n=0, 1, \dots$ имеем $\varphi_{j+1}(n) > \varphi_j(n)$, $j=0, 1, \dots$; при этом $\varphi_j(0) = 1$;

2) в частотной области $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(n) = 1$ для всякого $n=0,1,\dots$, а в пространственной области $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_j(P, Q) = \delta(P, Q)$.

Отметим, что, в силу последнего условия,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \Phi_{\varphi_j} * f\|_{L_2(\omega_1)} = 0, \quad (8)$$

что обеспечивает теоретическую возможность аппроксимации изучаемой функции f (сигнала) свёрткой $\Phi_j * f$ с любой точностью. В силу равенства Парсеваля,

$$\|f - \Phi_{\varphi_j} * f\|_{L_2(\omega_1)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (1 - \varphi_j(n))^2 a_{nm}^2 \leq \|f\|^2. \quad (9)$$

При этом погрешность аппроксимации монотонно убывает с возрастанием масштабного параметра j .

К тому же можно доказать, что [1, p.205]

$$\Phi_{\varphi_j} * f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \varphi_j(n) a_{nm} Y_{nm}(P), \quad \text{где } f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(P) \quad (10)$$

и, следовательно, аппроксимацию свёрткой можно заменить гармоническим анализом сигнала f по сфере и последующим гармоническим синтезом (10).

Числовую последовательность $\varphi_j(n)$ при фиксированном значении $j=0,1,\dots$ называют *символом масштабирующей функции*, а индекс j — *масштабным уровнем детализации*, или просто *масштабом*. Последовательность $\varphi_0(n)$ можно трактовать как *материнскую*, поскольку все остальные значения символа обычно генерируются по какому-нибудь простому правилу.

Масштабирующие функции — так же, как и воспроизводящие ядра — могут иметь спектр ограниченный ($\varphi_j(n) = 0$ для $n > N_j$) и неограниченный ($\varphi_j(n) \neq 0$ для $\forall n$).

Например [1, p. 203],

$$\varphi_0(n) = e^{-n}, \quad \varphi_j(n) = \varphi_0(\rho 2^{-j} n) = e^{-\rho 2^{-j} n} \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_0(\rho 2^{-j} n) = \varphi_0(0) = 1 \quad \text{для } \forall n. \quad (11)$$

Здесь $\rho > 0$ — вспомогательный параметр.

Неограниченная масштабирующая функция с таким символом имеет замкнутое выражение

$$\Phi_{b_j}(v) = \frac{1 - b_j^2}{(1 + b_j^2 - 2b_j v)^{3/2}}, \quad (12)$$

где $b_j = e^{-\rho 2^{-j}}$, и называется *масштабирующей функцией Абеля–Пуассона*.

Кстати, такое же выражение (только b без индекса j) имеет сумма неограниченной масштабирующей функции (7) с последовательностью $\varphi_j(n)$ в виде b^n для всякого значения $b < 1$.

В пространстве Ω_R внешнем относительно сферы ω_R радиуса R , масштабирующая функция имеет вид

$$\Phi_{\varphi_j}(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi R^2} \varphi_j(n) \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} P_n(v) = \Phi_{\varphi_j}(v), \quad v = \cos \psi = \frac{(\vec{r}_P, \vec{r}_Q)}{r_P r_Q}.$$

Здесь $r_P \geq R$ и $r_Q < R$ обозначают отстояния точек P, Q от начала координат, точка Q называется *полюсом* масштабирующей функции, а разность $R - r_Q$ — *глубиной* полюса. Часто удобнее пользоваться безразмерным выражением (умножение на постоянный множитель $4\pi R^2$ не меняет сути дела)

$$\Phi_{\varphi_j}(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_j(n) \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} P_n(v) = \Phi_{\varphi_j}(v). \quad (13)$$

При этом $(2n+1)\varphi_j(n)^2 = \sigma_n^2$ играют роль степенных дисперсий и определяют спектр

масштабирующей функции, поскольку $\|\Phi_{\varphi_j}\|_{L_2(\Omega_R)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2$. Условие совпадения этого спектра со спектром обрабатываемого сигнала позволяет подбирать масштаб масштабирующей функции в соответствии с разрешающей способностью имеющихся исходных данных.

Свёртка сигнала f с масштабирующей функцией

$$f_{\varphi_j}(P) = \int_{\omega} \Phi_{\varphi_j}(v) f(Q) d\omega \quad (14)$$

осуществляет низкочастотную фильтрацию, нужные характеристики которой можно обеспечить подбором соответствующих символа и уровня детализации.

Разность двух последовательных масштабирующих функций задаёт вейвлет

$$\Psi_{\varphi_j}(v) = \Phi_{\varphi_{j+1}}(v) - \Phi_{\varphi_j}(v), \quad (15)$$

свёртка с которым определяет полосовую фильтрацию, явно показывающую детальную информацию о структуре сигнала

$$g_{\varphi_j}(P) = \int_{\omega} \Psi_{\varphi_j}(v) f(Q) d\omega. \quad (16)$$

Эта информация содержится в $f_{\varphi_{j+1}}$, но неявно, а в f_{φ_j} не содержится вовсе. Поэтому с увеличением масштаба j вейвлет выделяет всё более и более мелкие детали в структуре сигнала. В качестве простейшего примера положим

$$\varphi_j(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n < 2^j \\ 0, & \text{если } n \geq 2^j \end{cases}; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Тогда функция вида

$$\Phi_j(P, Q) = \sum_{n=0}^{2^j-1} (2n+1)P_n(v) = \begin{cases} 2^j \frac{P_{2^j}(v) - P_{2^j-1}(v)}{v-1}, & v \in [-1; 1) \\ 2^{2j}, & v = 1 \end{cases} \quad (18)$$

является масштабирующей функцией ограниченного спектра и носит имя Шеннона–Котельникова. Соответствующий вейвлет Шеннона–Котельникова имеет вид

$$\Psi_j(P, Q) = \sum_{n=2^{j-1}}^{2^{j+1}-1} (2n+1)P_n(v). \quad (19)$$

Масштабирующая функция и вейвлет Шеннона–Котельникова являются идеальными фильтрами, соответственно, низкочастотным и полосовым. Так, свёртка любой функции из $L_2(\omega)$ с масштабирующей функцией Шеннона–Котельникова даёт отрезок ряда разложения этой функции по сферическим функциям:

$$\Phi_j(P, Q) * f(Q) = (\Phi_j * f)(P) = \sum_{n=0}^{n_j} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(P), \quad (20)$$

где $n_j = 2^j - 1$. Соотношение может служить приближённым ориентиром при установлении связи между масштабом j , верхней границей фильтруемых сферических гармоник n_j и соответствующей разрешающей способностью $res \approx 20000/n_j$.

Связь между масштабом j , максимальной степенью n_j разложения по сферическим функциям и разрешающей способностью res :

j	1	5	7	8	9	10	11	12
n_j	1	31	127	255	511	1023	2047	4095
res , км ...	20000	645	157	78	39	20	10	5

Описание частотных характеристик различных масштабирующих функций и вейвлетов можно найти, например, в [2].

Указанные действия составляют основную идею разномасштабного анализа: выделить из сигнала низкочастотную составляющую, а остаток разложить на несколько «слоёв» разной масштабной детализации и, следовательно, разной разрешающей способности,

$$f(P) = f_{\varphi_{j'}}(P) + \sum_{j=j'}^J g_{\varphi_j}(P) + \Delta f(P), \quad J > j'. \quad (21)$$

Здесь $f_{\varphi_{j'}}$ обозначает низкочастотную часть сигнала f , полученную свёрткой с масштабирующей функцией масштаба j' , свёртки с вейвлетами описывают «тонкую структуру» сигнала g_{φ_j} , а $\Delta f = f - f_{\varphi_{j'}}$ — остаток, который можно сделать как угодно малым. Разномасштабный анализ даёт возможность разные частотные диапазоны сигнала моделировать персонально сферическими вейвлетами соответствующего уровня детализации. Это имеет важное практическое значение, поскольку, например, спутниковая и наземная гравиметрия покрывают заведомо разные части спектра глобаль-

ного гравитационного поля Земли. И вообще, часто геодезические данные характеризуются приемлемой точностью только в определённой полосе частот (например, спутниковая градиентометрия), а нежелательные шумы имеют вполне ожидаемый спектр (например, в морской гравиметрии). Так что желательность вышеуказанного «расслоения» обусловлена самой природой многих типов измерений, а возможность адекватного моделирования разночастотных данных определяет и возможности для их адекватного комбинирования.

Возмущение и аномалия силы тяжести для масштабирующих функций и вейвлетов Абеля–Пуассона. Как известно, возмущение силы тяжести и аномалия силы тяжести, после линеаризации и сферической аппроксимации, связаны с возмущающим потенциалом гравитационного поля Земли следующими соотношениями [3]:

$$\delta g(P) \approx -\frac{\partial T(P)}{\partial r_p}; \quad (22)$$

$$\Delta g(P) \approx -\frac{2}{r_p} T(P) - \frac{\partial T(P)}{\partial r_p}. \quad (23)$$

Для дальнейшего полезно получить выражения, представляющие собой результат применения данных операторов к масштабирующим функциям и вейвлетам Абеля–Пуассона (12). Сначала найдём производную функции (12) по переменной r_p с учётом соотношения

$$v = \frac{r_p^2 + r_Q^2 - QP^2}{2r_p r_Q}. \quad (24)$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{b_j}(v)}{\partial r_p} &= \frac{\partial}{\partial r_p} \left(\frac{1 - b_j^2}{(1 + b_j^2 - 2b_j v)^{3/2}} \right) = \\ &= (1 - b_j^2)(-3/2) \times \\ &\times (1 + b_j^2 - 2b_j v)^{-5/2} (-2b_j) \frac{\partial v}{\partial r_p}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial r_p} = \frac{r_p^2 - r_Q^2 + QP^2}{2r_p^2 r_Q} = \frac{r_p - r_Q v}{r_p r_Q}. \quad (26)$$

Тогда

$$\delta \Phi_{b_j}(v) \approx -\frac{3b_j(1 - b_j^2)(r_p - r_Q v)}{r_Q r_p (1 + b_j^2 - 2b_j v)^{5/2}}; \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{b_j}(v) &\approx -\frac{2}{r_p} \frac{1 - b_j^2}{(1 + b_j^2 - 2b_j v)^{3/2}} - \\ &- \frac{3b_j(1 - b_j^2)(r_p - r_Q v)}{r_Q r_p (1 + b_j^2 - 2b_j v)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для вейвлетов имеем соответственно:

$$\delta \Psi_{b_j}(v) = \delta \Phi_{b_{j+1}}(v) - \delta \Phi_{b_j}(v); \quad (29)$$

$$\Delta \Psi_{b_j}(v) = \Delta \Phi_{b_{j+1}}(v) - \Delta \Phi_{b_j}(v). \quad (30)$$

В частотной области в результате воздействия операторами (22) и (23) символы $\phi_j(n)$ масштабирующей функции умножаются на выражения $(n+1)/r_p$ и $(n-1)/r_p$ соответственно:

$$\phi_j^\delta(n) = \frac{n+1}{r_p} \phi_j(n) = \frac{n+1}{r_p} e^{-\rho 2^{-j} n}; \quad (31)$$

$$\phi_j^\Delta(n) = \frac{n-1}{r_p} \phi_j(n) = \frac{n-1}{r_p} e^{-\rho 2^{-j} n}. \quad (32)$$

Аппроксимация сферическими радиальными базисными функциями (СРБФ).

Предположим, что изучаемая функция (сигнал) $f(P)$, $P \in \omega_R$, задана на некотором множестве P_1, P_2, \dots, P_n точек сферы ω_R или вне её. Тогда глобальное восстановление непрерывной функции f можно выполнить в виде линейной комбинации различных базисных функций с помощью метода наименьших квадратов. Например, использование сферических функций приводит к результату

$$f(r, \theta, \lambda) \approx \sum_{n=0}^N \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_{nm}(\theta, \lambda), \quad (33)$$

который широко используется, но, по существу, является действительно эффективным лишь для глобального моделирования низкочастотной части сигнала. Причина состоит в том, что любые сферические функции Y_{nm} осциллируют по всей сфере и, следовательно, пространственно не локализованы. Поэтому всякое изменение одного коэффициента a_{nm} отражается на аппроксимации по всей сфере и, наоборот, всякая локальная специфика сигнала «размазывается» по всей сфере. Таким образом, речь может идти лишь о моделировании тенденции сигнала «в среднем».

Поэтому при локальном моделировании, предназначенном для описания деталей сигнала, целесообразно вместо сферических функ-

ций пользоваться масштабирующими функциями $\Phi(P, Q)$, зависящими только от одной точки с исходными данными из окрестности точки вычисления P и быстро убывающими с увеличением расстояния:

$$f(P) \approx \sum_{j=1}^n \Phi(P, Q_j) x_j, \quad (34)$$

где x_j — весовые коэффициенты, подлежащие определению.

Это обеспечивает пространственную локализацию базисных функций и их согласование с разрешающей способностью имеющихся исходных данных. Соответствующее теоретическое обоснование дано в [4] и построено на том факте, что в свёртке (14) все три функции (вход, выход и ядро), по существу, принадлежат одному и тому же гильбертову пространству, и функции $\Phi(P, Q)$, $j=1, 2, \dots, n$ являются в этом пространстве базисными (если сигнал является функцией частотно ограниченной, то в (34) можно обеспечить и точное равенство).

Эти базисные функции, как уже не раз отмечалось, зависят только от сферического расстояния между точками и, к тому же, радиально симметричны. Поэтому их называют *сферическими радиальными базисными функциями* (СРБФ). Точки Q_j в (34) называются *полюсами* СРБФ. В простейшем случае полюса совпадают с точками, в которых заданы результаты исходных измерений, что и предполагается в формуле (34). Однако при большом количестве исходных данных n для определения n неизвестных коэффициентов приходится решать слишком большие и плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений. Чем детальнее исходные данные, тем более значимо проявляется неустойчивость. Одна из причин этого состоит в том, что информация, доставляемая линейной комбинацией большого количества СРБФ — вследствие их хорошей пространственной локализации — оказывается, как правило, переопределённой и близкой к линейной зависимости. Это вынуждает разредить полюса и выбирать их не обязательно совпадающими с узлами с данными. Таким образом, мы будем ориентироваться на соотношение вида

$$f(P) \approx \sum_{j=1}^k \Phi(P, Q_j) x_j, \quad (35)$$

где количество полюсов k обычно значительно меньше количества исходных данных n . Соответствующие уравнения связи имеют стандартный вид:

$$Ax = l + v; \quad A = (a_{ij}) = (\Phi(P_i, Q_j)); \quad (36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad k \leq n,$$

где l — столбец исходных измерений; v — столбец поправок в измерения; P_i — точки с исходными данными; Q_j — полюса.

Но свобода выбора полюсов требует обоснованных ответов на вопросы о количестве полюсов и их оптимальном расположении. Мы обсудим эти вопросы позднее, а сейчас сформулируем важную теорему, доказанную в [5].

Теорема (перефразирована по сравнению с оригиналом). Пусть $\Phi_1(v)$ и $\Phi_2(v)$ — две масштабирующие функции вида (13), символы которых равны 0 при n , превышающем определённое положительное число, а при каждом значении n , не превышающем это число, символы отличны от 0 и отличны друг от друга. Тогда, если свёртка сигнала f с масштабирующей функцией $\Phi_1(v)$ представ-

лена в виде $(\Phi_1 * f)(P) = \sum_{j=1}^N \Phi_1(P, Q_j) x_j$, то и

$$(\Phi_2 * f)(P) = \sum_{j=1}^N \Phi_2(P, Q_j) x_j.$$

Эта теорема имеет большое практическое значение, поскольку позволяет весовые коэффициенты, найденные применительно к какому-нибудь одному слагаемому в разложении (21), использовать без изменения и для моделирования другого слагаемого. В частности, при моделировании сигнала позволительно включать в совместную обработку исходные данные различной разрешающей способности (скажем, спутниковые и наземные), покрывающие разные части спектра.

Пусть, например, исходные данные y некоторой разрешающей способности заданы в точках $P_1^1, P_2^1, \dots, P_{n_1}^1$ некоторого региона, а в точках $P_1^2, P_2^2, \dots, P_{n_2}^2$ того же региона имеются данные z другого разрешения. Полюса по каким-то соображениям выбраны в точках Q_1, Q_2, \dots, Q_k . Тогда уравнения связи имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 & A_{n,k} x = l + v; \\
 & \begin{pmatrix} \Phi_1(P_1^1, Q_1) & \Phi_1(P_1^1, Q_2) & \dots & \Phi_1(P_1^1, Q_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_1(P_{n_1}^1, Q_1) & \Phi_1(P_{n_1}^1, Q_2) & \dots & \Phi_1(P_{n_1}^1, Q_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_2(P_1^2, Q_1) & \Phi_2(P_1^2, Q_2) & \dots & \Phi_2(P_1^2, Q_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_2(P_{n_2}^2, Q_1) & \Phi_2(P_{n_2}^2, Q_2) & \dots & \Phi_2(P_{n_2}^2, Q_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_1} \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Необходимые весовые коэффициенты получаем, как обычно, из решения соответствующих нормальных уравнений

$$N_{k,k} x = b, \quad N = A^T A, \quad b = A^T l. \quad (38)$$

Здесь $n_1 + n_2 = n$, а $\Phi_1(v)$, $\Phi_2(v)$ — сферические радиальные базисные функции, масштабный уровень детализации которых согласован с той полосой спектра, который покрывают исходные данные y и z , соответственно. Таким образом, разномасштабные исходные данные позволяют обоснованно получать единый набор весовых коэффициентов x и, следовательно, вносить в строящуюся модель ровно ту информацию, которая в них содержится. При этом предполагается, что из исходных данных предварительно удалена низкочастотная составляющая, длина волны которой соответствует размерам обсуждаемого региона. Так, например, при работе на территории пятиградусной трапеции 36 первых гармоник из исходных данных следует убрать ($180^\circ/5^\circ=36$).

Выбор наиболее эффективных полюсов СРБФ. Региональное моделирование деталей сигнала с помощью СРБФ определённых масштабов имеет свои проблемы, заметно отличающиеся от проблем глобального моделирования низкочастотной части. Одна из таких проблем — выбор полюсов. Соответствующей общей теории, насколько известно автору, не существует. Положения полюсов мы будем выбирать из узлов сетки Рейтера, покрывающей исследуемый регион с плотностью, которая примерно в два раза меньше плотности исходных данных. Для обеспечения перекрытия и согласования результатов планируемого регионального моделирования с аналогичными результатами в смежных регионах размеры сетки Рейтера следует увеличить на $1-2^\circ$ по краям региона. Полагая для начала, что полюсами служат все узлы Рейтера, экспериментально выбираем наиболее подходящую глубину их залегания относительно сферы, радиус которой равен минимальному из отстояний точек с исходными данными от начала координат. Критерием оптимальности при этом служит точность восстановления исходных данных линейной комбинацией (35) избранных СРБФ. Далее указанная сетка Рейтера помещается на найденную оптимальную глубину и составляет систему уравнений связи (36), полагая, что каждый узел сетки Рейтера является полюсом. Выше уже отмечалось, что практически иметь дело с такой системой крайне нежелательно. Поэтому необходимо отобрать из узлов сетки Рейтера *минимальное* количество таких полюсов, которые вместе обеспечивают заданную точность регионального моделирования.

Для решения этой задачи удобно воспользоваться алгоритмом, основанным на ортогональном методе наименьших квадратов и впервые предложенным, по-видимому, в [6]. Ниже излагается аналогичная процедура, вытекающая из чисто геометрических построений.

Перепишем систему уравнений связи (36) в виде

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = l + v, \quad (39)$$

где a_1, a_2, \dots, a_k — n -мерные линейно независимые векторы-столбцы матрицы A , определяющие базис некоторого k -мерного подпространства $\mathfrak{D}_k, k < n$.

Решение этой системы методом наименьших квадратов состоит, как известно, в определении координат $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k$ ортогональной проекции \hat{l} вектора l измерений на указанное подпространство, так что вектор уклонений $v = \hat{l} - l$ ортогонален любому вектору из этого подпространства и

$$\hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2 + \dots + \hat{x}_k a_k = \hat{l}. \quad (40)$$

Поэтому, если упомянутый базис преобразовать к «прямоугольному» виду, то есть сделать все векторы-столбцы a_1, a_2, \dots, a_k попарно ортогональными $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ (например, методом Грама–Шмидта), то полученное вместо (40) выражение

$$\bar{x}_1 \bar{a}_1 + \bar{x}_2 \bar{a}_2 + \dots + \bar{x}_k \bar{a}_k = \hat{l}, \quad (41)$$

представляет разложение вектора \hat{l} по ортогональной системе столбцов. Следовательно, коэффициенты такого разложения есть коэффициенты Фурье

$$\bar{x}_j = \frac{(\bar{a}_j, \hat{l})}{\|\bar{a}_j\|^2} = \frac{(\bar{a}_j, (l+v))}{\|\bar{a}_j\|^2} = \frac{(\bar{a}_j, l)}{\|\bar{a}_j\|^2}, \quad j=1, 2, \dots, k, \quad (42)$$

а равенство Парсевеля имеет вид

$$\sum_{j=1}^k \left(\frac{(\bar{a}_j, l)}{\|\bar{a}_j\|^2} \right)^2 \|\bar{a}_j\|^2 = \|\hat{l}\|^2 = \|l\|^2 - \|v\|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^k \frac{(\bar{a}_j, l)^2}{\|\bar{a}_j\|^2 \|l\|^2} = 1 - \frac{\|v\|^2}{\|l\|^2} \Rightarrow \sum_{j=1}^k \cos^2 \alpha_j + \cos^2 \beta = 1. \quad (43)$$

Здесь α_j — угол, который составляет исходный вектор-столбец измерений l с «координатной осью» \bar{a}_j подпространства \mathfrak{D}_k , а β — угол, который составляет l с v . Поскольку вектор v ортогонален подпространству \mathfrak{D}_k и, следовательно, каждой «оси» $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, то последнее соот-

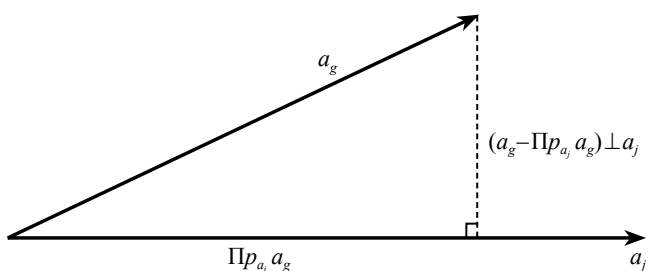


Рис. 1. Разность вектора a_g и его ортогональной проекции на a_j ортогональна a_j

ношение стандартно: сумма квадратов направляющих косинусов вектора l равна единице.

Из проделанных рассуждений ясно, что полюс, соответствующий некоторому столбцу, естественно признать наиболее эффективным, если вклад этого столбца в правые части равенств (43) является наибольшим, или, что всё равно, острый угол α , который этот столбец составляет в n -мерном пространстве со столбцом l , является минимальным. Практически надо вычислить все значения

$$\cos \alpha_g = \frac{(a_g, l)}{\|a_g\| \|l\|}, \quad g=1, 2, \dots, k \quad (44)$$

и выбрать наибольшее. Соответствующий столбец — будем полагать, что он имеет номер j — удаляется из матрицы, а тройка координат соответствующего полюса обозначается Poles.

Для выделения очередного эффективного полюса вспомним, что произведение всякого единичного вектора-столбца b на вектор-строку b^T даёт квадратную матрицу единичного ранга, представляющую собой ортогональный проектор на одномерное пространство вектора b . Поэтому

$$\frac{a_j a_j^T}{\|a_j\|^2} A = \text{Pr}_{a_j} A \quad (45)$$

есть матрица, столбцами которой служат ортогональные проекции векторов-столбцов редуцированной матрицы A (столбец a_j удалён). Следовательно, все столбцы матрицы

$$B = A - \frac{a_j a_j^T}{\|a_j\|^2} A = A - \text{Pr}_{a_j} A \quad (46)$$

ортогональны столбцу a_j (рис. 1).

Чтобы выбрать из них столбец, соответствующий наиболее эффективному полюсу, естественно вспомогательную матрицу B считать преобразованной матрицей A и воспользоваться тем же критерием коллинеарности (44). Найденный столбец удаляется из преобразованной матрицы A , тройка координат соответствующего полюса присоединяется к Poles в виде дополнительной строки и процесс повторяется. Таким образом, матрица Poles постепенно увеличивает количество трёхмерных строк до тех пор, пока это количество не достигнет k или пока использование Poles для составления матрицы

уравнений связи и вычисления методом наименьших квадратов весовых коэффициентов не обеспечит заданную точность моделирования. Это позволяет последовательно отбирать наиболее эффективные полюса, оказывающие наибольшее влияние на точность конечного результата.

Выбор СРБФ. Рассмотрим, для определённости, задачу построения детальной модели геоида по заданным дискретным значениям аномалии силы тяжести в некотором регионе, занимающем территорию сферической трапеции размера $5^\circ \times 5^\circ$.

Поскольку наибольшая длина волны, не превышающая размеры региона, приближённо соответствует сферической функции 36-й степени ($180^\circ/5^\circ=36$), то все гармоники до 36-й и ниже следует из исходных данных исключить с помощью одной из существующих глобальных моделей, а соответствующую низкочастотную часть высот геоида вычислить по той же модели.

Далее необходимо установить возможности имеющихся исходных данных (точность, спектральный состав, разрешающая способность), поскольку основное руководство при подборе СРБФ обычно состоит в согласовании спектра СРБФ со спектральным составом данных. Поэтому, если ковариационная функция исходных данных имеет вид

$$C(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2 P_n(\cos \psi),$$

где ψ — сферическое расстояние, а σ_n^2 — степенная дисперсия данных, то символ масштабирующей функции целесообразно подбирать из условия

$$\varphi_j(n) = \frac{\sigma_n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Полезным инструментом при этом является также *радиус корреляции* СРБФ, то есть такое расстояние, на котором её значение уменьшается наполовину по сравнению с максимальным значением в полюсе. Существует тесная зависимость между радиусом корреляции и глубиной залегания полюса. Чем больше радиус корреляции, тем меньше пространственная локализация СРБФ, и наоборот. Важно правильно согласовать пространственную локализацию базисных функций с детальностью

исходных данных. В общем случае, расстояние между полюсами не следует выбирать меньше, чем среднее расстояние между заданными точками. Даже несколько заниженное значение плотности полюсов бывает полезным с точки зрения хорошей подгонки модели к исходным данным и хорошей обусловленности, но это может плохо отразиться на согласовании с независимыми контрольными результатами. Слишком большие значения приводят к неустойчивости системы нормальных уравнений, поскольку зоны ответственности соседних СРБФ сильно перекрываются. Вынужденная при этом регуляризация неоправданно заглаживает решение. При этом СРБФ не в состоянии отразить мелкие детали данных, что приводит к наложению высоких частот.

Выбор спектральной локализации также важен. Так, если из исходных данных удалены гармоники до n_{\max} , то рекомендуется пользоваться базисными функциями, у которых в выражениях типа (13) нижняя граница суммирования $N_{\min}=n_{\max}+1$. Правда, как показывают эксперименты в локальных районах, значение N_{\min} можно безболезненно занижать, поскольку мелкие детали мало отражаются на низких коэффициентах Лежандра.

После выбора типа и спектрального состава СРБФ подбор радиуса корреляции равносильно согласованию оптимальной глубины полюсов и их плотности. Чем глубже полюса, тем больше радиус корреляции и, следовательно, тем вероятнее неустойчивость за счёт перекрытия зон влияния СРБФ. Маленькая глубина полюсов позволяет уменьшать их плотность. Но плотность полюсов зависит и от структуры сигнала: для гладкого сигнала требуется меньшая плотность и наоборот. Поэтому часто бывает полезным использовать две сетки полюсов: одну — достаточно глубокую — для моделирования низкочастотных составляющих сигнала, а другую — с мелко расположенными полюсами — для отражения деталей.

Поскольку при удалении низкочастотной составляющей длинноволновые ошибки наземных данных остаются, желательно выбирать такие РБФ, которые мало чувствительны к длинным волнам. Начальную степень n_0 в рядах типа (13) следует выбирать не меньше наибольшей степени референц-модели. Однако

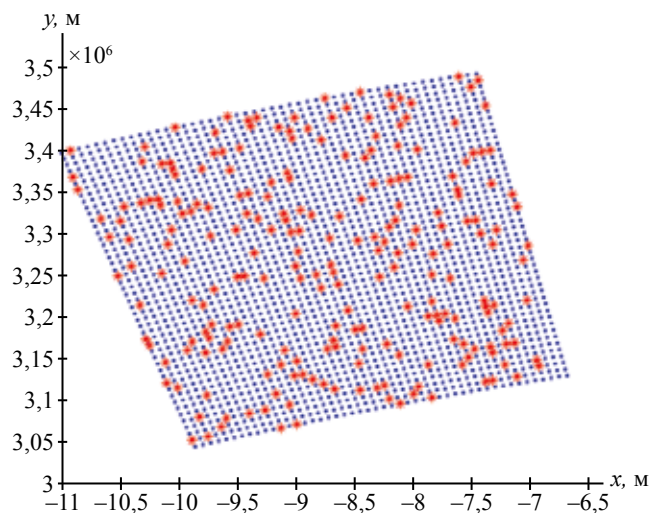


Рис. 2. Сетка исходных данных:

• — «рабочие» точки; * — «контрольные» точки

заметно уменьшить длинноволновые ошибки можно только путём соответствующей фильтрации.

Если символы выбирать под условием их совпадения со степенными дисперсиями сигнала, то выражение (7) приобретает смысл ковариационной функции и может трактоваться как сферический сплайн. В таких случаях аппроксимация средствами СРБФ сливается с методом коллокации.

Численный эксперимент. Для проверки и отработки выведенных формул и описанных алгоритмов были проведены численные эксперименты с использованием реальных измерений. Исходными данными послужили измеренные значения аномалий силы тяжести в области, заключённой между широтами 56–60° и долготами 102–108°. Шаг по широте составляет 5', по долготе — 7,5'. Измерения удобно рассматривать как числовую матрицу размера 48×48 (рис. 2). Около 90% из них были задействованы в вычислениях, а оставшиеся 10% использовались для контроля.

Описанные измерения были разложены

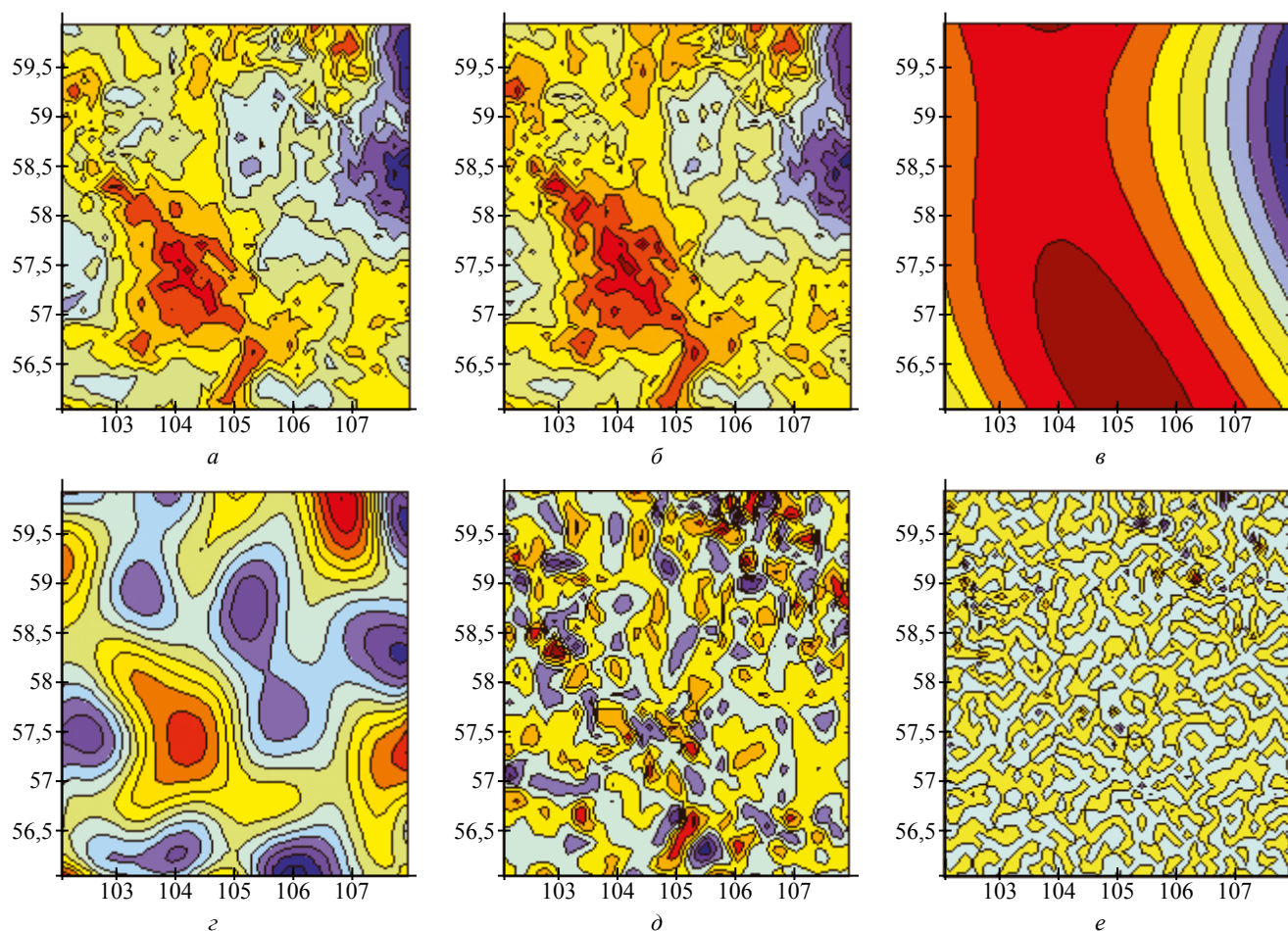


Рис. 3. Результат вейвлет-анализа измеренных значений аномалии силы тяжести (по оси абсцисс отложены долготы, по оси ординат — широты в градусах)

на несколько разномасштабных слоёв. Так как работа происходит в локальном регионе, то из исходных данных целесообразно предварительно убрать низкочастотную часть, наименьшая длина волны которой приблизительно соответствует размерам региона.

Итак, можно выделить следующие этапы процесса «расслоения» измерений:

1) удаление значений аномалии силы тяжести, вычисленных по модели ГПЗ до 50-й степени и порядка включительно (рис. 3, б);

2) низкочастотная фильтрация остатка с помощью аномалии силы тяжести для масштабирующей функции Абеля–Пуассона (28) масштаба $j=2$ (рис. 3, в);

3) полосовая фильтрация остатка предыдущего пункта с помощью аномалии силы тяжести для вейвлетов Абеля–Пуассона (30) масштабов $j=2,3,4$ (рис. 3, г);

4) полосовая фильтрация остатка предыдущего пункта с помощью аномалии силы тяжести для вейвлетов Абеля–Пуассона (30) масштабов $j=5,6,7$ (рис. 3, д).

Остаточное поле аномалии силы тяжести показано на рис. 3, е. Если сложить все описанные слои, показанные на рис. 3, б–е, то получим исходные полные значения (рис. 3, а).

Каждому этапу описанного процесса фильтрации предшествовал отбор подходящих полюсов из узлов сетки Рейтера (рис. 4) с шагом $12'$, что приблизительно в два раза больше среднего шага сетки измеренных значений. Область, покрываемая сеткой Рейтера, должна на $1-2^\circ$ выходить за пределы трапеции с исходными данными (см. рис. 4). Также предварительно должна быть вычислена оптимальная глубина заложения узлов сетки Рейтера. При этом критерием служит точность восстановления соответствующего слоя заданного поля аномалии силы тяжести с помощью масштабирующих функций (28) или вейвлетов Абеля–Пуассона (30).

Заключение. Функциональный ряд (13) с символом $\varphi_j(n) = e^{-\rho^{2j}n}$ нередко используется в качестве ядра в задачах со свёртками по сфере, поскольку его сумма имеет форму элементарной функции, что заметно упрощает вычислительные алгоритмы. Кроме того, масштабирующая функция Абеля–Пуассона строго положительна при всех положениях точек P и Q на сфере Ω_R и достаточно быстро убывает с

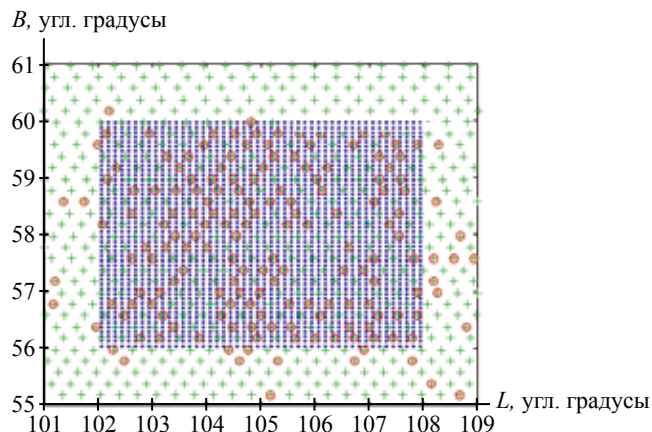


Рис. 4. Область с исходными данными и сетка Рейтера:

• — узлы с данными; + — сетка Рейтера; ○ — привлеченные полюса

увеличением сферического расстояния между P и Q . С точки зрения принципа неопределённости (например, [2, с.45]), соотношение пространственной и частотной локализации близко к оптимальному [5].

Предложенные формулы (27) – (30) расширяют возможные геодезические приложения и переносят классические понятия вейвлетов Абеля–Пуассона на наиболее важные трансформанты геопотенциала.

Вычисления, проделанные в соответствии с изложенной теорией отыскания наиболее эффективных полюсов, показали способность этих вейвлетов разбивать реальные значения аномалии силы тяжести на несколько разномасштабных составляющих. Сеть изолиний на рис. 3 наглядно демонстрирует разрешающие способности различных составляющих.

ЛИТЕРАТУРА

1. Michel V. Lectures on Constructive Approximation. Fourier, Spline, and Wavelet Methods on the Real Line, the Sphere, and the Ball. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2011.
2. Нейман Ю.М., Сугаинова Л.С. Основы разномасштабной аппроксимации геопотенциала. М.: Изд-во МИИГАиК, 2016.
3. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия / Пер. с англ. под ред. Неймана Ю.М., М.: МИИГАиК. – 2007. – 410 с.
4. Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gurr T., Eiker A., Kusche J., Sanchez J., Han S.C Regional gravity modeling in terms of spherical base functions, J Geodesy (2007) 81:17–38.
5. Freeden W, Gervens T, Schreiner M Constructive approximation on the sphere (with applications to geomathematics). Clarendon Press, Oxford, 1998.
6. Chen S., Cowan C.F.N., Grant P.M. Orthogonal least squares algorithm for radial basis function networks. IEEE Transactions on Neural Networks, (1991), Vol.2, №.2, pp.302–309.

Принята к печати 22 мая 2017 г.

Рекомендована кафедрой высшей математики МИИГАиК