

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЭФФИЦИЕНТОВ МОЛОДЕНСКОГО ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ АНОМАЛИИ ВЫСОТ

©2017 Л.С. Сугаипова

Московский государственный университет геодезии и картографии, Россия
yunev@miigaik.ru

Аннотация. Кратко изложен ход решения основной задачи физической геодезии в свете теории Молоденского. Приводится новая интерпретация известных коэффициентов усечения, возникающих при решении указанной задачи в локальной области, вводится понятие частотной характеристики. Выведены формулы, связывающие между собой классические и модифицированные коэффициенты Молоденского.

Ключевые слова: коэффициенты усечения, модифицированное ядро Стокса, ближняя зона, дальняя зона

A FEW COMMENTS ON USING MOLODENSKY'S COEFFICIENTS FOR CALCULATING HEIGHT ANOMALIES

©2017 Sugaipova L.

Moscow State University of Geodesy and Cartography, Russia
yunev@miigaik.ru

Abstract. The solution of the fundamental equation of physical geodesy in the framework of Molodensky's theory is briefly stated. New interpretation of the known truncation coefficients for solution of the specified task in local area is given. In this context a frequency response is introduced. The formulae which are to connect classical and modified Molodensky's coefficients are derived.

Keywords: truncation coefficients, modified Stokes' function, near zone, far zone

Краевая задача физической геодезии. В линейной теории Молоденского [1, 2] основное соотношение физической геодезии рассматривается на теллуриде Σ и связывает между собой доступную для измерений аномалию силы тяжести Δg и искомый возмущающий потенциал T :

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + \Delta g = 0. \quad (1)$$

Задача состоит в решении дифференциального уравнения Лапласа $\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

во внешнем относительно теллурида пространстве при краевом условии (1). Поскольку производная в (1) берётся по направлению векторной линии h нормального поля (точнее, по направлению изозенициала, см. [3]), не совпадающему с нормалью к поверхности Σ , то речь идёт о краевой задаче с кривой производной, значительно более трудной, чем классическая задача Стокса.

Мы будем иметь дело со сферической аппроксимацией задачи, когда все математические действия, в которых участвует референц-эллипсоид с полуосями a и b , выполняются так, как если бы этот эллипсоид был сферой радиуса $R = \sqrt[3]{a^2 b}$, то есть геодезические координаты точек трактуются как сферические с радиусом-вектором $r = R + h$, где h — геодезическая высота. При этом векторные линии нормального поля (и изозенициалы) совпадают с радиусами сферы и краевое условие (1) на теллуриде принимает упрощенный вид [4]:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r} = -\Delta g.$$

Известно, что указанные допущения приводят к погрешностям порядка сжатия референц-эллипсоида, то есть около 1/300, что обычно допускается при практическом решении задачи Молоденского. При этом геодезическая высота H точки теллурида называется нормальной высотой и отличается от геодезической высоты h соответствующей точки земной поверхности на

аномалию высоты (высоту квазигеоида) $\zeta = T/\gamma$. Здесь нормальная сила тяжести γ , строго говоря, относится к упомянутой точке теллурида, но можно пользоваться и её средним значением $9,8 \text{ м/с}^2$. Аномалия силы тяжести вычисляется по формуле $\Delta g = g - \left(\gamma_0 + H \frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)$, где $\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -0,3086 \text{ мГал/м}$; H — нормальная высота над эллипсоидом (сферой); γ_0 — нормальная сила тяжести на эллипсоиде (сфере).

Наиболее простое решение геодезической краевой задачи в сферической аппроксимации достигается путём аналитического продолжения исходных значений аномалии силы тяжести с поверхности теллурида на какую-нибудь уровенную поверхность нормального поля, например, проходящую через точку вычисления. Сферическая аппроксимация при этом приводит к третьей краевой задаче теории потенциала и, в конечном счёте, использованию известного интеграла Пуассона, разрешающего внешнюю краевую задачу Дирихле для сферы

$$r_P \Delta g_P = \frac{r_P^2 - R^2}{4\pi R} \iint_{\omega_R} \frac{R \Delta g_Q}{\ell_{PQ}^3} d\omega.$$

Здесь ω_R — сфера радиуса R ; ℓ_{PQ} — расстояние между текущей точкой Q на сфере и точкой вычисления P на или вне теллурида, а дробь $\frac{r_P^2 - R^2}{\ell_{PQ}^3}$ представляет собой сумму известного ряда по полиномам Лежандра P_n . Для $\forall b \in (-1; 1)$ и $\forall v \in [-1; 1]$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{(1+b^2-2bv)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n P_n(v); \quad \frac{1-b^2}{(1+b^2-2bv)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)b^n P_n(v),$$

поэтому

$$\Delta g_P = \frac{1}{4\pi r_P^2} \iint_{\omega_R} \Delta g_Q \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi) d\omega,$$

где ψ обозначает сферическое расстояние между точками P и Q .

Возмущающий потенциал можно записать в форме такого же ряда

$$T_P = \frac{1}{4\pi r_P^2} \iint_{\omega_R} \Delta g_Q \sum_{n=0}^{\infty} t(2n+1) \left(\frac{R}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi) d\omega,$$

где неизвестный множитель t определяется из уравнения (1) и имеет вид $t = \frac{r_P}{(n-1)}$ при $n \geq 2$.

Таким образом,

$$T_P = \frac{1}{4\pi r_P} \iint_{\omega_R} \Delta g \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left(\frac{R}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi) d\omega.$$

На единичной сфере имеем свёртку

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} S(\psi) \cdot \Delta g d\omega = \frac{1}{4\pi} S(\psi) * \Delta g,$$

где

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \cdot \ln \left[\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right] \quad (2)$$

представляет собой известное ядро Стокса.

Указанное выше аналитическое продолжение аномалии силы тяжести к нормальной уровенной поверхности точки вычисления практически реализуется с помощью ряда Тейлора [3, 4].

Но если рельеф в изучаемом районе не очень сложный, то обычно можно ограничиться так называемым градиентным методом. Это означает, что в ряде Тейлора достаточно пользоваться только линейным членом. Так, аномалию высоты можно вычислять по формуле

$$\zeta_A = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} S(\psi)(\Delta g + g_1) d\omega = St(\Delta g + g_1), \quad (3)$$

где

$$(g_1)_P = -(h_P - h_A) \frac{\partial \Delta g}{\partial h} = -(h_P - h_A) \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\omega} \frac{\Delta g_Q - \Delta g_P}{\ell_{PQ}^3} d\omega_Q.$$

Неудобство состоит в том, что поправку g_1 приходится вычислять заново для каждой новой точки вычисления A . Но часто вместо поправки g_1 в формуле (3) без значительной потери точности можно пользоваться поправкой за рельеф [3] $C_P = \frac{1}{2} G\rho R^2 \iint_{\omega} \frac{(h_Q - h_P)^2}{\ell_{PQ}^3} d\omega_Q$, что обусловлено обычно имеющей место тесной корреляцией силы тяжести с высотами рельефа. Здесь G обозначает гравитационную постоянную, ρ — плотность топографических масс ($2,67 \text{ г/см}^3$).

В конечном счёте, аномалию высоты можно вычислить по формуле

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} S(\psi)(\Delta g + C) d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} S(\psi) \Delta g_F d\omega,$$

где $\Delta g + C = \Delta g_F$ принято называть аномалией Фая.

Однако более надёжной является следующая последовательность действий:

оценить вертикальную производную $\frac{\partial \Delta g}{\partial h} \approx -T_{zz}$;

продолжить все заданные значения Δg вниз, $\Delta g_0 \approx \Delta g - \frac{\partial \Delta g}{\partial h} H$;

по формуле типа (3) вычислить $\zeta_0 = St(\Delta g_0)$;

полученные значения ζ_0 продолжить вверх, $\zeta = \zeta_0 - \frac{\Delta g_0}{\gamma} H$.

Известно, что отличие высоты геоида N от аномалии высоты ζ не превышает 2 м и может быть оценено по формуле [4] $N - \zeta = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H \approx \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H$, где черта сверху обозначает среднее значение, а аномалия Буге $\Delta g_B = \Delta g - 2\pi G\rho H = \Delta g - 0,11187H$.

В заключение этого раздела отметим, что погрешности, возникающие при вычислении аномалий высот за счёт линейризации и сферической аппроксимации, можно заметно ослабить, если вместо стандартного нормального поля, генерируемого уровенным эллипсоидом, воспользоваться одной из существующих в настоящее время глобальных моделей геопотенциала, полученных по чисто спутниковым данным.

Решение в локальной области. Теперь будем полагать, что исходные значения аномалии силы тяжести, предназначенные для вычисления аномалий высоты, заданы только в некоторой ограниченной области ω_0 приближённо круговой формы, радиус которой соответствует сферическому расстоянию ψ_0 . В связи с этим, ядро Стокса $S(\psi)$ разобьём на две части — внутреннюю $\bar{S}(\psi)$ и внешнюю $\Delta S(\psi)$ так, что

$$\bar{S}(\psi) = \begin{cases} S(\psi); & 0 < \psi \leq \psi_0; \\ 0; & \psi_0 < \psi \leq \pi; \end{cases} \quad \Delta S(\psi) = \begin{cases} 0; & 0 \leq \psi \leq \psi_0; \\ S(\psi); & \psi_0 < \psi \leq \pi \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\bar{S}(\psi) + \Delta S(\psi) = S(\psi). \quad (5)$$

При этом аномалия высоты

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} S(\psi)\Delta g d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} \bar{S}(\psi)\Delta g d\omega + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega-\omega_0} \Delta S(\psi)\Delta g d\omega, \quad (6)$$

где второе слагаемое в правой части называется влиянием дальней зоны и приближённо учитывается с помощью модели глобального гравитационного поля в виде конечного ряда по сферическим функциям. Наибольшая степень суммирования согласуется с размером ψ_0 ближней зоны. В основе соответствующей теории лежат введённые Молоденским [1] коэффициенты усечения:

$$Q_n(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi)P_n(\cos\psi)\sin\psi d\psi = -\int_{v_0}^{-1} S(v)P_n(v)dv = \int_{-1}^{v_0} S(v)P_n(v)dv,$$

где $v = \cos\psi$ (для удобства обозначение S после замены переменной оставляем без изменения). Другими словами,

$$Q_n(\psi_0) = \int_0^{\pi} \Delta S(\psi)P_n(\cos\psi)\sin\psi d\psi = \int_{-1}^1 \Delta S(v)P_n(v)dv, \quad (7)$$

то есть $Q_n(\psi_0)/\|P_n(v)\|^2$ — коэффициенты Фурье внешней части ядра Стокса $\Delta S(\psi)$ при её разложении по ортогональной системе ненормированных полиномов Лежандра.

Поэтому

$$\Delta S(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(\psi_0)}{\|P_n(v)\|^2} P_n(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0) P_n(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0) \frac{2n+1}{n-1} P_n(v),$$

а формулу (2) можно переписать в виде

$$S(v) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(v) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2} \frac{2}{n-1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(v) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2} Q_n(0) \frac{2n+1}{n-1} P_n(v) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(0) P_n(v).$$

Отсюда видно, что скалярное произведение

$$\int_{-1}^1 S(v)P_n(v)dv = Q_n(0) = \begin{cases} \frac{2}{n-1}, & n \geq 2; \\ 0, & n = 0, 1. \end{cases} \quad (8)$$

Для внутренней части ядра Стокса имеем

$$\bar{S}(v) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1} - \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_0) \right) P_n(v) = \sum_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0) \right] \frac{2n+1}{n-1} P_n(v).$$

Сомножитель, стоящий в квадратных скобках, можно интерпретировать как частотную характеристику оператора усечения ядра Стокса за счёт введения внутренней зоны радиуса ψ_0 . При изменении ψ_0 от 0 до π эта частотная характеристика изменяется от 0 до 1.

При учёте влияния дальней зоны полезно иметь в виду, что для свёртки $\iint_{\omega} \Delta S(\psi)\Delta g d\omega$ полностью нормированные гармоники $\Delta g_{nm}(\theta, \lambda)$ являются собственными функциями с собственными числами $2\pi Q_n(\psi_0)$. Доказательство этого факта можно найти в работе [5]. Поэтому

$$\iint_{\omega} S(\psi)\Delta g_{nm} d\omega = 2\pi Q_n(0)\Delta g_{nm} = \frac{4\pi}{n-1} \Delta g_{nm},$$

и влияние дальней зоны можно вычислить следующим образом:

$$\frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega-\omega_0} S(\psi)\Delta g d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} \Delta S(\psi)\Delta g d\omega = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n,m} Q_n(\psi_0)\Delta g_{nm} = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(\psi_0)\Delta g_n. \quad (9)$$

Если интегрировать по области ω_0 с ядром $\bar{S}(\psi) = S(\psi) - \Delta S(\psi)$, то собственными числами служат $2\pi[Q_n(0) - Q_n(\psi_0)] = 2\pi\left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_0)\right)$, см. (8). Поэтому стандартная процедура «уда-

лечь – вычислить – восстановить» [4] рекомендует следующие действия для вычисления аномалии высоты в ближней зоне:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} S(\psi) \Delta g \, d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} S(\psi) \left(\Delta g - \sum_{n=2}^N \Delta g_n \right) d\omega + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_0) \right) \Delta g_n. \quad (10)$$

Складывая ближнюю (10) и дальнюю (9) зоны, получим окончательно

$$\zeta(P) \approx \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} S(\psi_{pp'}) \left(\Delta g(P') - \sum_{n=2}^N \Delta g_n(P') \right) d\omega_{p'} + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N \frac{2}{n-1} \Delta g_n(P). \quad (11)$$

Погрешность за счёт ограниченности используемого ряда определяется остатком

$$\delta\zeta(P) = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n(\psi_0) \Delta g_n(P). \quad (12)$$

Наивысшая степень N удаляемых гармоник согласовывается с размером области ω_0 . Простейшая рекомендация состоит в том, чтобы $N > 180^\circ / \omega_0^\circ$, где ω_0° — размер ближней зоны в градусах. Однако выбор большого значения N ограничивается дополнительным влиянием случайных ошибок гармонических коэффициентов привлекаемых сферических гармоник Δg_n .

Соотношение, теоретически эквивалентное (11), но без предварительного удаления низкочастотной составляющей данных, имеет вид:

$$\zeta(P) \approx \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} S(\psi_{pp'}) \Delta g(P') d\omega_{p'} + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^N Q_n(\psi_0) \Delta g_n(P). \quad (13)$$

Отметим, что влияние дальней зоны уменьшается с увеличением радиуса ближней зоны, и потому соответствующая погрешность может быть доведена до пренебрегаемой величины. Однако, если размер ближней зоны фиксирован, то уменьшить погрешность влияния дальней зоны можно, как это видно из формулы (12), лишь увеличением скорости сходимости коэффициентов $Q_n(\psi_0)$ при $n \rightarrow \infty$. В связи с этим, в литературе можно найти множество различных модификаций ядра Стокса. Так, работы [5–9] направлены на оптимизацию точности вычислений на основе различной информации о структуре аномального гравитационного поля и его погрешностей. В работах [10,11] рассмотрено влияние дальней зоны при вычислении высот квазигеоида в области прямоугольной формы. Мы же останемся здесь в рамках рассуждений применительно к аномальному гравитационному полю любой структуры и остановимся на получившем широкое применение предложении О.М. Остача [12]. Суть его состоит в том, что оригинальное ядро Стокса $S(\psi)$ разбивается на две части следующим образом (ср. с (4)):

$$\bar{S}^\circ(\psi) = \begin{cases} S(\psi) - S(\psi_0); & 0 < \psi \leq \psi_0; \\ 0; & \psi_0 < \psi \leq \pi; \end{cases} \quad \Delta S^\circ(\psi) = \begin{cases} S(\psi_0); & 0 \leq \psi \leq \psi_0; \\ S(\psi); & \psi_0 < \psi \leq \pi. \end{cases}$$

При этом по-прежнему (ср. с (5))

$$\bar{S}^\circ(\psi) + \Delta S^\circ(\psi) = S^\circ(\psi) = S(\psi),$$

но $\bar{S}^\circ(\psi_0) = 0$ и обе слагаемые функции непрерывны во всей области определения $S(\psi)$ в отличие от слагаемых $\bar{S}(\psi)$ и $\Delta S(\psi)$ в формулах (4) и (5).

Определение (7) коэффициентов Молоденского как коэффициентов Фурье внешней части ядра Стокса $\Delta S^\circ(\psi)$ при её разложении по ортогональной системе ненормированных полиномов Лежандра формально остаётся неизменным, но значения модифицированных коэффициентов — мы их будем обозначать как $Q_n^\circ(\psi_0)$ — несколько меняются. В самом деле,

$$\begin{aligned} Q_n^\circ(\psi_0) &= \int_{-1}^1 \Delta S^\circ(v) P_n(v) dv = S(\psi_0) \int_{v_0}^1 P_n(v) dv + \int_{-1}^{v_0} S(v) P_n(v) dv = \\ &= S(\psi_0) \int_{v_0}^1 P_n(v) dv + \int_{-1}^1 \Delta S(v) P_n(v) dv = S(\psi_0) \int_{v_0}^1 P_n(v) dv + Q_n(\psi_0). \end{aligned}$$

Далее воспользуемся известным рекуррентным соотношением между полиномами Лежандра и их производными $(2n+1)P_n(v) = P'_{n+1}(v) - P'_{n-1}(v)$; $n \geq 1$.

Поэтому

$$\int_{v_0}^1 P_n(v) dv = \frac{P_{n+1}(v) - P_{n-1}(v)}{2n+1} \Big|_{v_0}^1 = \frac{1-1}{2n+1} - \frac{P_{n+1}(v_0) - P_{n-1}(v_0)}{2n+1}$$

и, следовательно,

$$Q_n^{\circ}(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + \frac{S(\psi_0)}{2n+1} [P_{n-1}(v_0) - P_{n+1}(v_0)]. \quad (14)$$

Этому соотношению можно придать несколько иной вид, если воспользоваться ещё одной известной рекуррентной формулой для полиномов Лежандра $P_{n+1}(v) = \frac{2n+1}{n+1} v P_n(v) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(v)$.

Из неё следует, что

$$[P_{n-1}(v_0) - P_{n+1}(v_0)] = P_{n-1}(v_0) - \frac{2n+1}{n+1} v_0 P_n(v_0) + \frac{n}{n+1} P_{n-1}(v_0) = \frac{2n+1}{n+1} P_{n-1}(v_0) - \frac{2n+1}{n+1} v_0 P_n(v_0).$$

Поэтому вместо (14) можно пользоваться формулой

$$Q_n^{\circ}(\psi_0) = Q_n(\psi_0) + \frac{S(\psi_0)}{n+1} [P_{n-1}(v_0) - v_0 P_n(v_0)]. \quad (15)$$

Таким образом, классические и модифицированные коэффициенты Молоденского связаны эквивалентными соотношениями (14), (15).

Указанная выше непрерывность обеспечивает тот факт, что модифицированные коэффициенты убывают быстрее, чем классические (рис. 1, а).

На рис. 2 показаны графики классических $\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0)\right]$ и модифицированных $\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^{\circ}(\psi_0)\right]$ частотных характеристик усечения ядра Стокса для двух значений радиуса ближней зоны ψ_0 . Большшему значению ψ_0 соответствуют меньшие значения периода и амплитуды графика. Прямая линия иллюстрирует единичную частотную характеристику ($\psi_0 = 180^\circ$).

В терминах модифицированных коэффициентов исходная формула (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} S^{\circ}(\psi) \Delta g d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} \bar{S}^{\circ}(\psi) \Delta g d\omega + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} \Delta S^{\circ}(\psi) \Delta g d\omega = \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} (S(\psi) - S(\psi_0)) \Delta g d\omega + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^{\circ}(\psi_0) \Delta g_n, \end{aligned} \quad (16)$$

поскольку сферические функции Δg_n по-прежнему являются собственными функциями свёртки $\iint_{\omega} \Delta S^{\circ}(\psi) \Delta g d\omega$ с собственными числами в виде умноженных на 2π коэффициентов Фурье ядра этой свёртки при его разложении по ортогональной системе ненормированных полиномов Лежандра. А такими коэффициентами Фурье являются, по определению, модифицированные коэффициенты $Q_n^{\circ}(\psi_0)$.

Основные формулы (9)–(13) по форме остаются без изменения, надо лишь $S(\psi)$ и $Q_n(\psi_0)$ заменять на $S^{\circ}(\psi)$ и $Q_n^{\circ}(\psi_0)$ соответственно.

Однако влияние дальней зоны в (16) можно переписать в виде

$$\frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n^{\circ}(\psi_0) \Delta g_n = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} \Delta S(\psi) \Delta g d\omega + \frac{R}{4\pi\gamma} S(\psi_0) \iint_{\omega_0} \Delta g d\omega \approx \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(\psi_0) \Delta g_n + \frac{R}{\gamma} S(\psi_0) u(\psi_0) \overline{\Delta g}.$$

Здесь $0 < u(\psi_0) < 1$ обозначает ту часть, которую занимает размер ближней зоны на сфере инте-

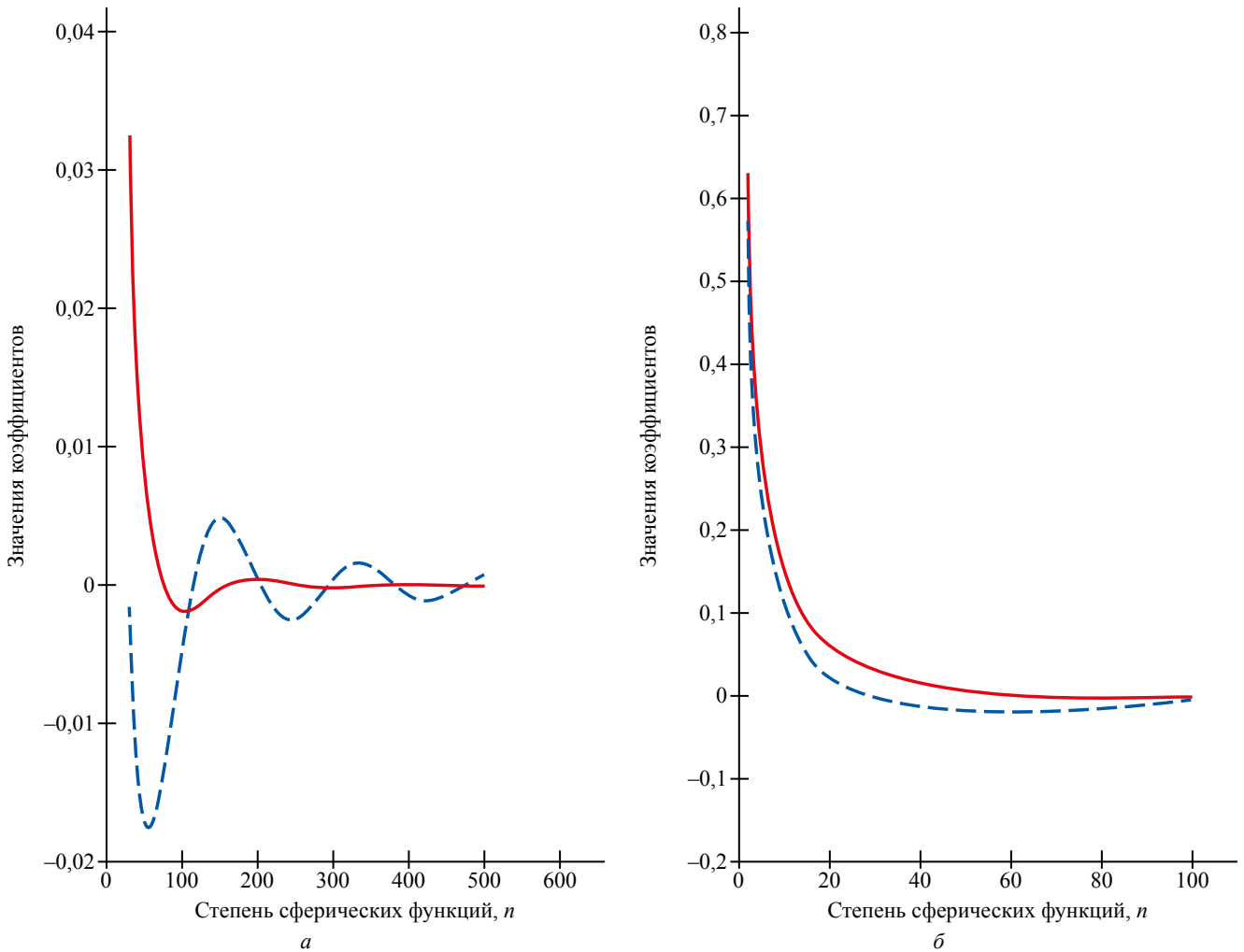


Рис. 1. Графики коэффициентов Молоденского для $\Psi_0 = 2^\circ$ на разных промежутках частот:
 — классические $Q_n(\Psi_0)$; — модифицированные $Q_n^\circ(\Psi_0)$

рирования, а $\overline{\Delta g}$ — среднее значение аномалии силы тяжести в ближней зоне. Аналогично выглядит и погрешность за счёт ограниченности используемого ряда (12)

$$\begin{aligned} \delta\zeta(P) &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n^\circ(\Psi_0) \Delta g_n(P) \approx \\ &\approx \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n(\Psi_0) \Delta g_n + \frac{R}{\gamma} S(\Psi_0) u(\Psi_0) \overline{\Delta g}. \end{aligned}$$

Таким образом, хотя модифицированные коэффициенты убывают быстрее коэффициентов классических, вычисления показывают, что на низких степенях $|Q_n^\circ(\Psi_0)| > |Q_n(\Psi_0)|$ (см. рис. 1, б). Поэтому влияние дальней зоны при конечном в формуле (13), для сравнения подсчитанное с помощью коэффициентов классических и модифицированных, совсем не обязательно окажется в пользу последних.

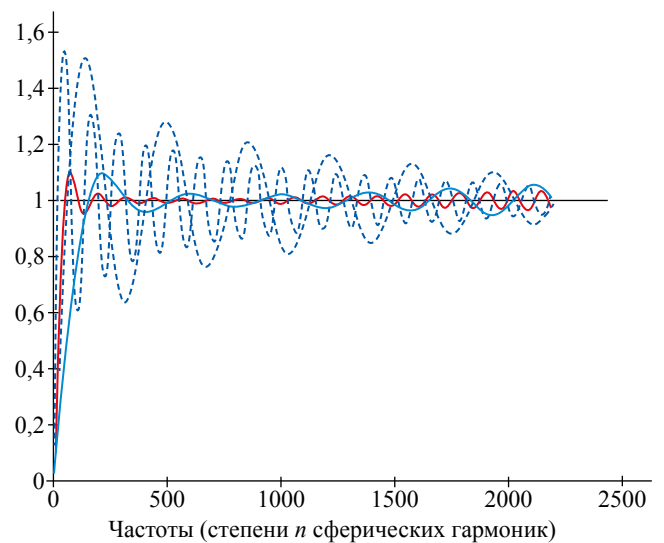


Рис. 2. Графики частотных характеристик для $\Psi_0 = 1^\circ$ и $\Psi_0 = 3^\circ$:

— классических; — модифицированных

В этом смысле формула (11) практически более эффективна при использовании именно модифицированных коэффициентов.

Заключение. Итак, выделим те замечания, которые представляются нам полезными:

1) обе части, на которые делится ядро Стокса в соответствии с модификацией О.М. Остача, непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, в отличие от (4);

2) коэффициенты Молоденского — как оригинальные, так и модифицированные — удобно трактовать через коэффициенты Фурье соответствующей внешней части ядра Стокса при её разложении по ортогональной системе ненормированных полиномов Лежандра;

3) для свёрток $\iint_{\omega} S(\psi) \Delta g d\omega$ и $\iint_{\omega} S^{\circ}(\psi) \Delta g d\omega$ полностью нормированные гармоники $\Delta g_{nm}(\theta, \lambda)$ являются собственными функциями с собственными числами $2\pi Q_n(\psi_0)$ и $2\pi Q_n^{\circ}(\psi_0)$, соответственно;

4) классические и модифицированные коэффициенты Молоденского связаны эквивалентными соотношениями (14), (15).

5) соотношение $\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^{\circ}(\psi_0) \right]$ естественно интерпретировать как частотную характеристику оператора усечения ядра Стокса за счёт введения внутренней зоны радиуса ψ_0 . При изменении ψ_0 от 0 до π эта частотная характеристика изменяется от 0 до 1 и ответственна за локализацию исходных данных. При наличии исходных данных только в ближ-

ней зоне, этот факт рекомендуется учитывать и при решении обсуждаемой задачи другими средствами, например, с помощью радиальных базисных функций различного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М.С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Труды ЦНИИГАиК, 1945. – Вып. 42.
2. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Методы изучения внешнего гравитационного поля Земли и фигуры Земли // Труды ЦНИИГАиК. – Вып. 131, М.: Геодезиздат, 1960.
3. Мориц Г. Современная физическая геодезия / Пер. с англ. под ред. Неймана Ю.М., М.: Недра, 1983.
4. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия / Пер. с англ. под ред. Неймана Ю.М., М.: МИИГАиК, 2007.
5. Jekeli C. Reducing the error of geoid undulation computations by modifying Stokes's function. The Ohio State University, Reports of the department of Geodetic Science, Rep. № 301, 1980.
6. Бровар В.В., Чеснокова Т.С. Аппроксимационные формулы для вычисления возмущающего потенциала и его производных в приближении Стокса // Труды ГАИШ, т. 61, М.: МГУ, 1989.
7. Бышев В.А. Оптимизация преобразования Молоденским формулы Стокса // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъёмка», 1994. – №2–3. – С. 11–27.
8. Еремеев В.Ф., Юркина М.И. Учет влияния дальних зон на высоту квазигеоида и на уклонения отвеса // Труды ЦНИИГАиК, 1957. – Вып. 121.
9. Нейман Ю.М. К описанию гравитационного поля Земли рядами шаровых функций // Геодезия и картография, –1975. – №9.
10. Нейман Ю.М., Руденя Н.Р. Учет влияния дальней зоны при вычислении высот квазигеоида в области прямоугольной формы // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъёмка». –1992. – №4–5. – С. 39–54.
11. Руденя Н.Р. Зависимость вклада дальней зоны в высоту квазигеоида от геометрической формы ближней зоны // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъёмка». –1998. – №1. – С. 67–74.
12. Остач О.М. Реферативный: Сборник ЦНИИГАиК. –1970. – №6.

Принята к печати 22 октября 2017 г.

Рекомендована кафедрой
высшей математики МИИГАиК