

От интеграла Стокса к аппроксимации с помощью СРБФ

© 2018 г. Л.С. Сугаипова

Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия
leyla_sugaipova@mail.ru

From Stokes' integral to approximation by means of SRBF

L.S. Sugaipova

Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia
leyla_sugaipova@mail.ru

Received Oktober 16, 2017

Accepted February 2, 2018

Keywords: frequency characteristic, height anomaly, near zone Stokes' scaling functions, Stokes' wavelets.

Summary. The problem of determining quasigeoid from gravimetry has a well-known solution by means of Stokes' integral. To solve the same problem using regional gravity data, different modifications of Stokes' kernel can be used. One of them was proposed by O.M. Ostach. In [1] the frequency characteristic of the truncation operator of Stokes' kernel onto inner zone of ψ_0 radius is introduced. There it was established that expansion of the truncated (by Ostach) Stokes' kernel into Legendre polynomials differs from the expansion of Stokes' kernel by this frequency characteristic. In this article the fundamental equation of physical geodesy in local area is proposed to solve by means of spherical radial basis functions (SRBF) instead of integrating. New scaling functions and wavelets are introduced. These functions use the frequency characteristic of the truncation operator of Stokes' kernel that intercepts contribution of far zone. The two-step numerical experiment has been carried out in order to test these new scaling functions. At first, gravity anomalies and height anomalies were calculated from EGM2008 on a regular grid in $4^\circ \times 6^\circ$ and $2^\circ \times 4^\circ$ areas, respectively. At the first step gravity anomalies were approximated by linear combination of scaling functions with identically equal to 1 frequency characteristic. At the second step height anomalies were modelled by means of the new scaling functions but with the same poles and coefficients of linear combination. Comparison of modelled quantities against calculated ones has shown a high precision of recovering of height anomalies from regional gravity data.

Citation: Sugaipova L.S. From Stokes' integral to approximation by means of SRBF. *Izvestiya vuzov «Geodeziya i aerofotosyemka»*. Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying». 2018, 62 (1): 15–22. [In Russian]. DOI: 10.30533/0536-101X-2018-62-1-15-22.

Поступила 16 октября 2017 г.

Принята к печати 2 февраля 2018 г.

Ключевые слова: аномалия высоты, ближняя зона, вейвлеты Стокса, масштабирующие функции Стокса, частотная характеристика.

Основную задачу физической геодезии в локальной области предлагается решать, заменяя интегрирование использованием сферических радиальных базисных функций. В рассмотрение вводятся масштабирующие функции и вейвлеты Стокса, учитывающие частотную характеристику оператора усечения ядра Стокса, предложенную автором в работе [1]. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность восстановления аномалий высоты по аномалиям силы тяжести.

Для цитирования: Сугаипова Л.С. От интеграла Стокса к аппроксимации с помощью СРБФ // Изв. вузов «Геодезия и аэрофото-съемка». 2018. Т. 62. № 1. С. 15–22. DOI: 10.30533/0536-101X-2018-62-1-15-22.

Обзор необходимых сведений

При вычислении аномалий высот ζ по гра-
виметрическим данным основополагающую
роль играет интегральное преобразование
Стокса

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} S(\psi) \Delta g \, d\omega = \frac{R}{4\pi\gamma} S(\psi) * \Delta g, \quad (1)$$

где $S(\psi)$ — известное ядро Стокса; ψ — сфери-

ческое расстояние между точкой вычисления и
текущей точкой интегрирования; Δg — анома-
лия силы тяжести; ω — единичная сфера; R —
средний радиус Земли; γ — среднее значение
нормальной силы тяжести; * — обозначение
свертки.

Однако на практике исходные значения
аномалии силы тяжести, предназначенные для
вычисления аномалий высоты, часто доступны

только в некоторой ограниченной области ω_0 . Таким образом, речь идет об интегрировании вида

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega_0} \bar{S}^0(\psi) \Delta g d\omega, \quad (2)$$

$$\text{где } \bar{S}^0(\psi) = \begin{cases} S(\psi) - S(\psi_0); & 0 < \psi \leq \psi_0; \\ 0; & \psi_0 < \psi \leq \pi. \end{cases}$$

Будем полагать для простоты, что область ω_0 имеет приближенно круговую форму, радиус которой соответствует некоторому сферическому расстоянию ψ_0 . Можно доказать, что выражение ядра $\bar{S}^0(\psi)$ в частотной области отличается от аналогичного выражения полного ядра $S(\psi)$ сомножителем

$$\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^0(\psi_0) \right], \quad (3)$$

который естественно интерпретировать как *частотную характеристику оператора усечения ядра Стокса* на внутреннюю зону радиуса ψ_0 . При изменении ψ_0 от 0 до π эта частотная характеристика меняется от 0 до 1. Основу этого понятия составляют коэффициенты усечения $Q_n^0(\psi_0)$, введенные М.С. Молоденским [2] и модифицированные О.М. Остачем. Все подробности и выводы, в том числе соотношений между оригинальными $Q_n(\psi_0)$ и модифицированными $Q_n^0(\psi_0)$, коэффициентами усечения, можно найти в работе [1].

При локальном моделировании, предназначенном для описания деталей «полезного сигнала» (т.е. изучаемой функции), целесообразно вместо традиционного интегрирования пользоваться аппроксимацией масштабирующими функциями $\Phi(P, Q)$, зависящими только от одной точки с исходными данными из окрестности точки вычисления P и быстро убывающими с увеличением расстояния:

$$f(P) \approx \sum_{j=1}^n \Phi(P, Q_j) x_j. \quad (4)$$

Здесь $f(P)$ символизирует сигнал (например, аномалию высоты); x_j — весовые коэффициенты, подлежащие определению. Это обеспечивает пространственную локализацию

базисных функций и их согласование с разрешающей способностью имеющихся исходных данных. Соответствующее теоретическое обоснование дано в работе [3] и построено на том факте, что в свертке типа (1) все три функции (вход, выход и ядро) принадлежат одному и тому же гильбертову пространству и функции $\Phi(P, Q_j)$, $j=1, 2, \dots, n$ в этом пространстве — базисные.

Эти базисные функции зависят только от сферического расстояния между точками, к тому же они радиально симметричны, поэтому их называют *сферическими радиальными базисными функциями* (СРБФ). Точки Q_j в формуле (4) — *полюсы* СРБФ. В простейшем случае полюса совмещают с точками, в которых заданы результаты исходных измерений, что и предполагается в формуле (4). Однако при большом числе исходных данных для определения неизвестных коэффициентов приходится решать слишком большие и плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений. Чем детальнее исходные данные, тем более значимо проявляется неустойчивость. Одна из причин этого в том, что информация, доставляемая линейной комбинацией большого числа СРБФ в результате их хорошей пространственной локализации, оказывается, как правило, переопределенной и близкой к линейной зависимости. Это вынуждает разредить полюса и выбирать их, не обязательно совпадающими с узлами данных. Таким образом, мы будем ориентироваться на соотношение

$$f(P) \approx \sum_{j=1}^k \Phi(P, Q_j) x_j, \quad (5)$$

где число полюсов k обычно значительно меньше числа исходных данных n . Соответствующие уравнения связи имеют стандартный вид:

$$Ax = l + v; \quad A = (a_{ij}) = (\Phi(P_i, Q_j));$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad k \leq n,$$

где l — столбец исходных измерений; v — столбец поправок в измерения; P_i — точки с исходными данными; Q_j — полюса.

При этом предполагается, что из исходных данных предварительно удалена низкочастот-

ная составляющая, длина волны которой соответствует размерам обсуждаемого региона. Так, при работе на территории пятиградусной трапеции 35–40 первых гармоник из исходных данных следует убрать ($180^\circ/5^\circ = 36$). В общем виде СРБФ представляет собой следующую функцию сферического расстояния ψ между точками P и Q :

$$\Phi_{\phi_j}(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \phi_j(n) P_n(\nu) = \Phi_{\phi_j}(\nu), \quad \nu = \cos \psi. \quad (6)$$

Выражение (6) называется *масштабирующей функцией* на единичной сфере, если выполняются два условия [4].

1. Неотрицательная числовая последовательность $\phi_j(n)$ монотонно убывает по n и монотонно возрастает по j , т.е. для всякого $j=0, 1, \dots$ имеет место неравенство $\phi_j(n+1) < \phi_j(n)$, $n=0, 1, \dots$, и для всякого $n=0, 1, \dots$ имеем $\phi_{j+1}(n) > \phi_j(n)$, $j=0, 1, \dots$; при этом $\phi_j(0) = 1$.

2. В частотной области $\lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(n) = 1$ для всякого $n=0, 1, \dots$, а в пространственной области $\Phi_{\phi_j}(P, Q)$ стремится к дельта-функции Дирака $\delta(P, Q)$ при $j \rightarrow \infty$. Отметим, что, в силу последнего условия $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \Phi_{\phi_j} * f\|_{L_2(\omega_1)} = 0$; это обеспечивает теоретическую возможность аппроксимации изучаемой функции f (сигнала) сверткой $\Phi_j * f$ с любой точностью.

Последовательность $\phi_j(n)$, которую обычно называют символом, и ее параметр j , который называют масштабом, характеризуют спектральные свойства масштабирующей функции и могут быть выбраны под условием отражения соответствующих свойств сигнала. В этом состоят уникальные свойства СРБФ моделировать разномасштабные исходные данные.

Для описания высокочастотного состава сигнала в литературе можно найти различные аппроксимации поведения степенных дисперсий геопотенциала, аномалии силы тяжести и т.п. Наиболее известны следующие:

Каула (1966 г.): $\sigma_n^2 \approx (2n+1) \frac{10^{-10}}{n^4} \approx 0,5 \frac{1,6 \cdot 10^{-10}}{n^3}$ — безразмерные степенные дисперсии;

Чернинг и Ранн (1974 г.) [5]: $\sigma_n^2 = s^{n+2} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)}$, $n \geq 3$, $\sigma_2^2 = 7,5 \text{ мГал}^2$; $A = 425,28 \text{ мГал}^2$, $B = 24$, $s = 0,999617$;

Флури (2006 г.) [6]: $n \geq 400$, $\sigma_n^2 = \frac{6,8 \cdot 10^7}{(n+0,5)^{3,1}} \text{ мГал}^2$.

Пользуясь подобными моделями, мы будем выбирать коэффициенты Лежандра в (6) под условием

$$(2n+1)\phi_j(n)^2 = \sigma_n^2 \Rightarrow \phi_j(n) = \frac{\sigma_n}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \|\Phi_{\phi_j}\|_{L_2(\Omega_R)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2.$$

При этом основа для масштабирующей функции, предназначенной для вычисления высот квазигеоида по аномалиям силы тяжести, см. (2), имеет следующий вид:

$$\Phi_{\phi}(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{2n+1} \sigma_n P_n(\cos \psi), \quad (7)$$

где P — точка вычисления; Q — полюс; ψ — сферическое расстояние между ними; σ_n^2 — степенные дисперсии геопотенциала.

Новые масштабирующие функции и вейвлеты для локального моделирования сигнала

Наша цель — локальное моделирование, в частности вычисление высот квазигеоида по гравиметрической информации в ограниченной области ω_0 . Этот факт регулируется частотной ха-

рактеристикой (3), где ψ_0 характеризует размер ближней зоны, поэтому вместо (7) мы предлагаем ввести в рассмотрение новую масштабирующую функцию вида

$$\Phi_{j,\psi_0}(P,Q) = \sum_{n=2}^{2^j} \sqrt{2n+1} \sigma_n \left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^o(\psi_0) \right] P_n(\cos \psi); \quad j = 2, 3, \dots \quad (8)$$

и называть ее масштабирующей функцией Стокса масштаба j для работы в локальной круговой зоне радиуса $0 < \psi_0 < \pi$ (рис. 1, $a-z$). Разность двух последовательных масштабирующих функций задает вейвлет Стокса $\Psi_{j,\psi_0}(\nu) = \Phi_{j+1,\psi_0}(\nu) - \Phi_{j,\psi_0}(\nu)$ (см. рис. 1, $u-m$).

Аппроксимация с помощью вейвлетов позволяет получать детальную информацию о структуре сигнала, которая содержится в моделях, построенных с помощью Φ_{j+1,ψ_0} но неявно, а в моделях, построенных с помощью Φ_{j,ψ_0} , не содержится совсем [7], поэтому с увеличением масштаба j вейвлет выделяет все более и более мелкие детали в структуре сигнала.

Численный эксперимент

Продолан численный эксперимент для проверки способности введенных в рассмотрение новых масштабирующих функций Стокса (8) решать задачу определения аномалий высот по аномалиям силы тяжести, заданным в ограниченной области. Вычисления проводились в области $4^\circ \times 6^\circ$, ограниченной геодезическими широтами $B_{\min} = 56^\circ$, $B_{\max} = 60^\circ$ и долготами $L_{\min} = 102^\circ$, $L_{\max} = 108^\circ$. С помощью глобальной модели геопотенциала EGM2008 мы вычислили относительные референц-эллипсоида WGS84 значения аномалии силы тяжести Δg в 2304 узлах регулярной

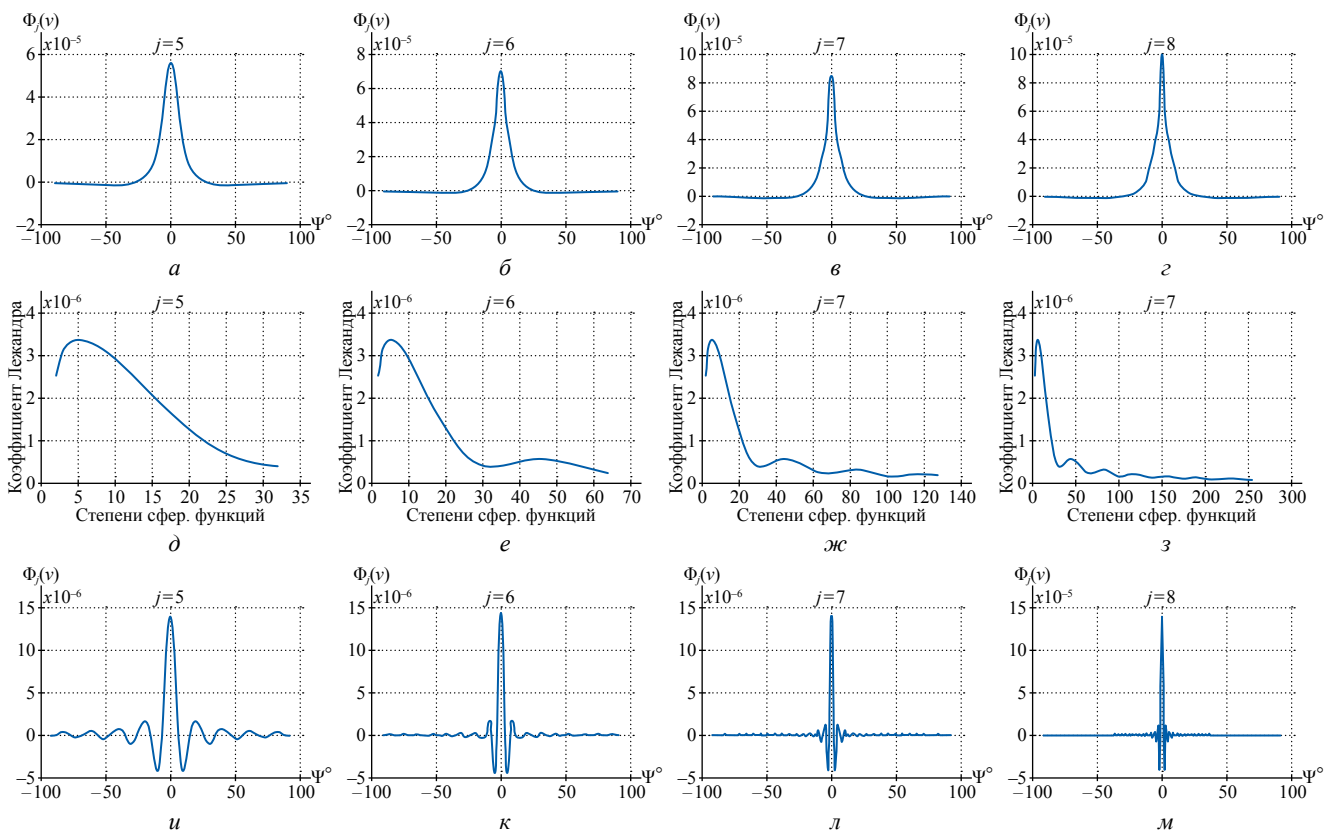


Рис. 1. Масштабирующие функции Стокса различных масштабов ($a-z$); спектральный состав масштабирующих функций ($\delta-z$); вейвлеты Стокса ($u-m$)

Fig. 1. Stokes' scaling functions of different scales ($a-z$); spectra of the Stokes' scaling functions ($\delta-z$); Stokes' wavelets ($u-m$)

сетки $5' \times 7,5'$ и использовали их в качестве исходных данных для вычисления аномалий высот ζ во внутренней зоне $2^\circ \times 4^\circ$. Таким образом, область с исходными данными для предотвращения краевых эффектов на один градус с каждой стороны шире зоны вычисления ζ .

Первый этап эксперимента состоял в моделировании всех сеточных значений аномалии силы тяжести линейной комбинацией (5), где в качестве СРБФ используется масштабирующая функция (8). Частотная характеристика $\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^0(\psi_0)\right]$ усечения ядра Стокса полагалась при этом тождественно равной единице ($\psi_0 = 180^\circ$). Степенные стандарты σ , имеющие размерность мГал, для масштабов $j < 12$ подсчитаны по модели EGM2008. При $j \geq 12$ степенные стандарты для степеней выше 2048 получены по модели Флури. Заметим, что моделирование с масштабом $j \geq 12$ позволяет неявно имитировать ситуацию, когда в исходные

значения аномалии силы тяжести введены высокочастотные поправки за рельеф. Что касается низкочастотных составляющих ГПЗ, то мы исходили из того, что в настоящее время определенный диапазон спектра $[2, M]$ известен достаточно надежно и экспериментировали с гармониками степеней выше N . В частности, взято $N = 250$.

Суммирование линейной комбинации полиномов Лежандра в (8) выполнялось методом Кленшоу (см., например, [8]). Наиболее эффективные полюса Q_j выбирались из узлов известной сетки Рейтера (см., например, [9]) по алгоритму, основанному на ортогональном методе наименьших квадратов. На рис. 2 показан пример результата такого моделирования высокочастотной части аномалии силы тяжести (степени 251–2190) с масштабом 11 и 2258 полюсами. На рис. 2, а, б даны рельеф области вычислений (см. рис. 2, а) и исходное плоское скалярное поле аномалии силы тяжести Δg

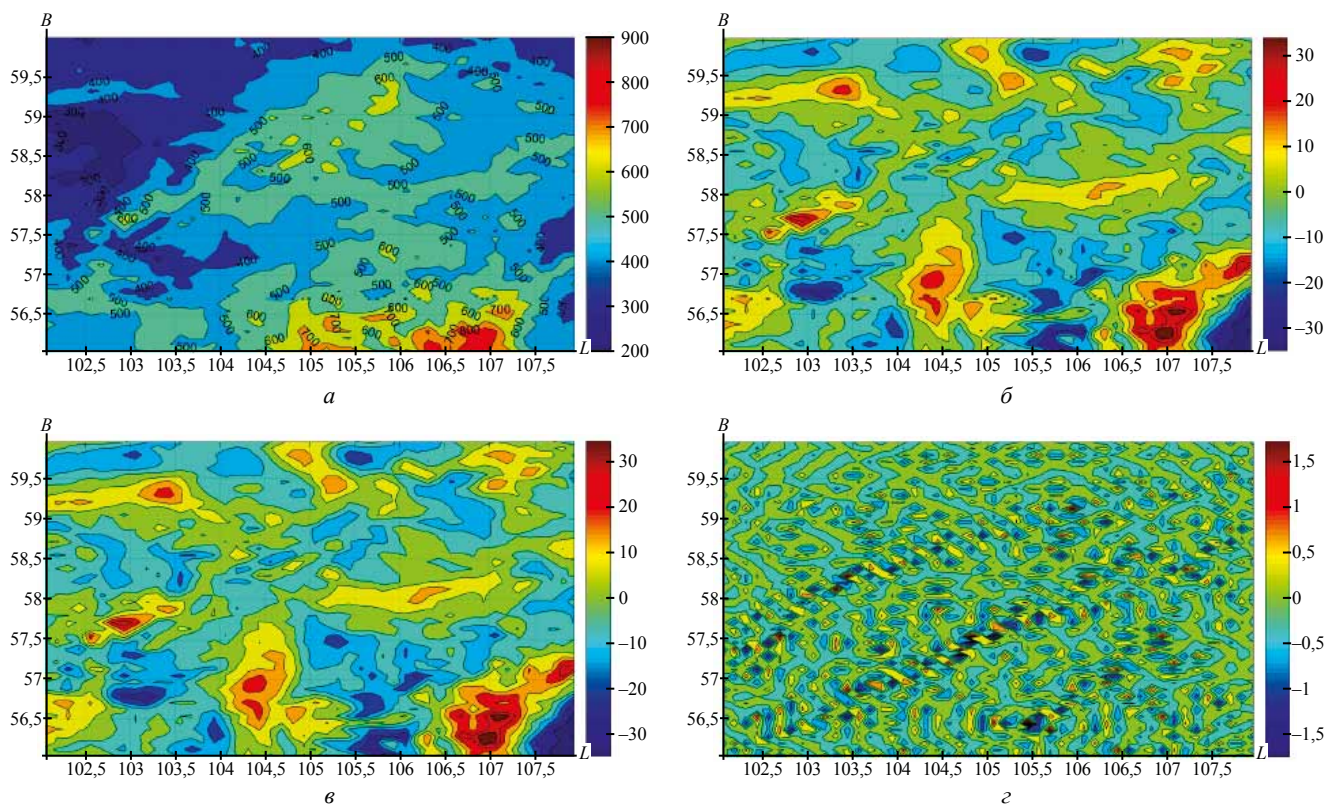


Рис. 2. Рельеф области вычислений и исходное поле аномалии силы тяжести (а, б); результат моделирования и остаточное поле (в, г)

Fig. 2. Relief of the region under consideration and the initial field of gravity anomaly (а, б); result of modeling and residual field (в, г)

(см. рис. 2, б), подлежащее моделированию. Рис. 2, в, г содержит результат моделирования $\hat{\Delta}g$ (см. рис. 2, в) и остаточное поле $\Delta g - \hat{\Delta}g$ (см. рис. 2, г). Среднеквадратическая ошибка (СКО) поточечной аппроксимации составляет 0,5 мГал, а коэффициент корреляции между Δg и $\hat{\Delta}g$ практически равен единице (0,9986).

Формальный результат моделирования аномалии силы тяжести — набор прямоугольных координат отобранных полюсов (в данном примере 2258 шт.) и столбец 2258 безразмерных коэффициентов x .

Второй этап эксперимента состоял в использовании полученных полюсов и коэффициентов для аппроксимации во внутренней зоне точечных значений аномалии высот. При этом использовалась масштабирующая функция той же структуры (8), но с учетом безразмерной частотной характеристики усечения ядра Стокса и соответствующих степенных стандартов σ в метрах. Радиус ближней зоны $\psi_0 = 1,6^\circ$ приближенно подсчитан как радиус круга, равновеликого площади зоны вычисления ζ .

Графики классических $\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n(\psi_0)\right]$ и модифицированных $\left[1 - \frac{n-1}{2} Q_n^0(\psi_0)\right]$ частотных характеристик усечения ядра Стокса для двух значений радиуса ближней зоны ψ_0 показаны на рис. 3, а. Большому значению ψ_0 соответствуют меньшие значения периода и амплитуды графика. Прямая линия иллюстрирует единичную частотную характеристику ($\psi_0 = 180^\circ$). Рис. 3, б показывает влияние частотных характеристик на масштабирующую функцию Стокса.

Использование различного числа полюсов отражается на точностных характеристиках как моделирования аномалии силы тяжести, так и применения этих результатов для аппроксимации аномалий высот. Отбор оптимальных полюсов затрудняется тем эмпирически проявляющимся фактом, что точность аппроксимации аномалий высот нелинейно зависит от точности моделирования аномалии силы тяжести, первоначально являющейся критерием оптимальности место-

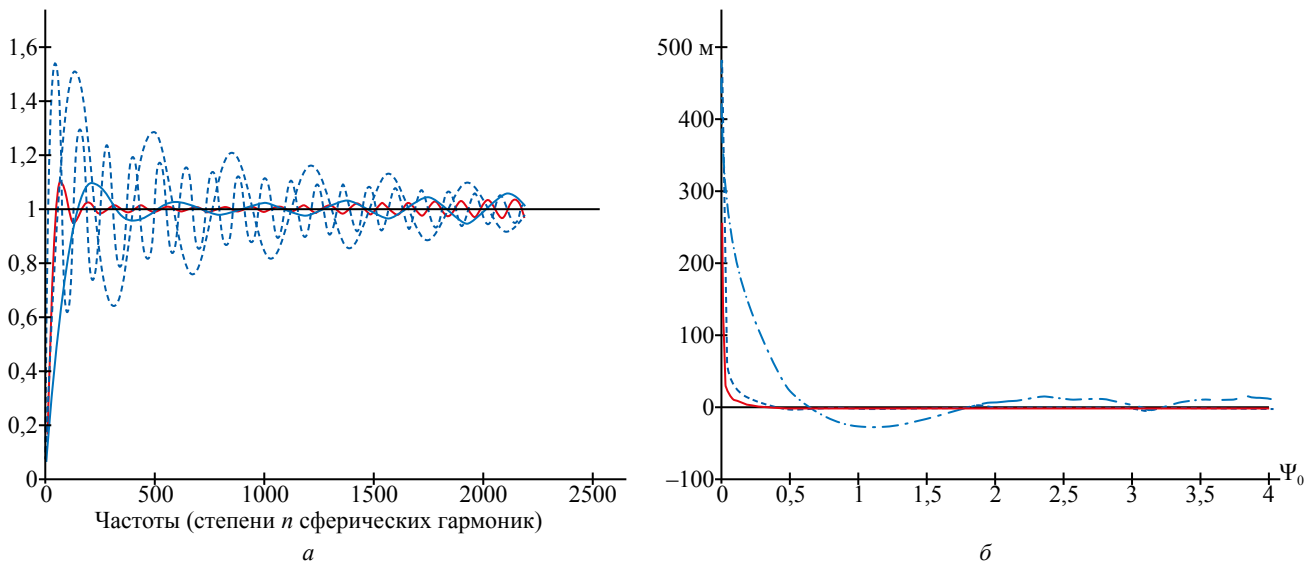


Рис. 3. Графики частотных характеристик классических (штриховые линии) и модифицированных (непрерывные линии) для $\psi_0 = 1^\circ$ и $\psi_0 = 3^\circ$ (а); масштабирующие функции вида (8) масштаба 11 с частотными характеристиками единичной (штриховая линия с точками), классической (штриховая линия, $\psi_0 = 2^\circ$) и модифицированной (непрерывная линия, $\psi_0 = 2^\circ$) (б)

Fig. 3. Plots of the frequency characteristics: classical (dashed lines) and modified (solid lines) for $\psi_0 = 1^\circ$ and $\psi_0 = 3^\circ$ (a); scaling functions (8) of scale 11 with frequency characteristics: unit (dashed line with dots), classical (dashed line, $\psi_0 = 2^\circ$) and modified (solid line, $\psi_0 = 2^\circ$) (b)

положения полюсов. Рекомендация о числе полюсов простейшая — примерно половина от общего числа исходных данных. В следующем примере использовались 1677 полюсов для моделирования 2304 точечных значений. Среднеквадратическая ошибка моделирования масштабирующей функцией Стокса масштаба 11 равна 0,62 мГал, а коэффициент корреляции между Δg и $\hat{\Delta g}$ практически равен единице (0,998). Результат оценивания аномалий высоты в ближней зоне $\psi_0 = 1,6^\circ$ проиллюстрирован на рис. 4.

На рис. 4, *a*, *б* показаны рельеф области вычислений (см. рис. 4, *a*) и исходное плоское скалярное поле аномалий высоты ζ (см. рис. 4, *б*), подлежащее аппроксимации. Рис. 4, *в*, *г* содержит результат аппроксимации $\hat{\zeta}$ (см. рис. 4, *в*) и остаточное поле $\zeta - \hat{\zeta}$ (см. рис. 4, *г*). Среднеквадратическая ошибка поточечной аппроксимации составляет 0,009 м, а коэффициент корреляции между ζ и $\hat{\zeta}$ равен 0,998. Заметим, что, согласно эмпирической

формуле Фесберга [10]

$$\sigma(n_{\max}; \zeta) = \sqrt{\sum_{n=n_{\max}+1}^{\infty} \sigma_n^2(\zeta)} \approx \frac{64 \text{ м}}{n_{\max}},$$

среднеквадратическая ошибка аномалии высот за счет конечности использованной нами модели EGM2008 составляет $\sigma(2190; \zeta) \approx 0,03$ м. Аппроксимация аномалий высот с частотной характеристикой усечения ядра Стокса, тождественно равной единице, дает заметно худший результат (СКО=0,12 м). Изменение радиуса ближней зоны $1,6^\circ$ в сторону уменьшения и в сторону увеличения также приводит к ухудшению точности аппроксимации.

Заключение

Проведенный численный эксперимент показал, что новые масштабирующие функции Стокса вида (8) позволяют решать задачу определения аномалий высот по аномалиям силы тяжести, заданным в локальном регионе, до-

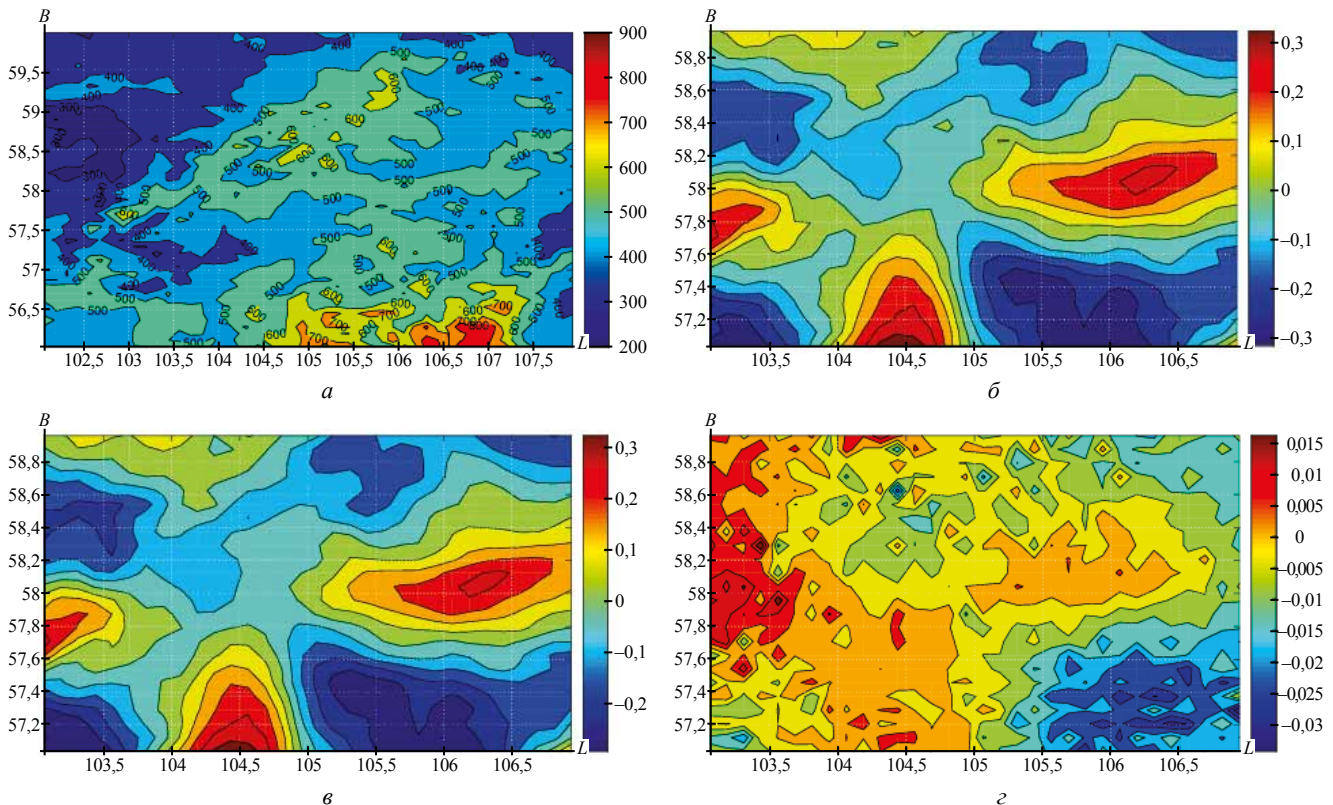


Рис. 4. Рельеф области вычислений и исходное поле аномалий высоты (*a*, *б*); результат аппроксимации и остаточное поле (*в*, *г*)

Fig. 4. Relief of the region under consideration and the initial field of height anomaly (*a*, *b*): result of approximation and residual field (*в*, *г*)

статочной эффективно. При этом введенная частотная характеристика усечения ядра Стокса на внутреннюю зону дает возможность отсеять неявное влияние дальней зоны. Известные масштабирующие функции, не использующие указанную частотную характеристику, приводят, как показывают вычисления, к смещенным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сугайпова Л.С.* Несколько замечаний относительно коэффициентов Молоденского при вычислении аномалий высот // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2017. № 6. С. 17–24.
2. *Молоденский М.С.* Основные вопросы геодезической гравиметрии // Тр. ЦНИИГАиК. 1945. Вып. 42. 110 с.
3. *Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gurr T., Eiker A., Kusche J., Sanchez J., Han S.C.* Regional gravity modeling in terms of spherical base functions // Journ. of Geodesy. 2007. № 81. P. 17–38.
4. *Michel V.* Lectures on Constructive Approximation. Fourier, Spline, and Wavelet Methods on the Real Line, the Sphere, and the Ball. New York. Birkhäuser: Springer, 2013. 328 с.
5. *Tscherning C.C., Rapp R.H.* Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models. Department of Geodetic Science. The Ohio State University. Columbus (OH). Rep. 208. 1974. 94 p.
6. *Flury J.* Short-wavelength Spectral Properties of the Gravity Field from a Range of Regional Data Sets // Journ. of Geodesy. 2006. № 79. P. 624–640.
7. *Freedon W., Fehlinger T., Klug M., Mathar D., and Wolf K.* Classical Globally Reflected Gravity Field Determination in Modern Locally Oriented Multiscale Framework // Journ. of Geodesy. 2009. V. 83. № 12. P. 1171–1191.
8. *Holmes S.A., Featherstone W.E.* A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions // Journ. of Geodesy. 2002. V. 76. № 5. P. 279–299.
9. *Reuter R.* Über Integralformeln der Einheitssphäre und harmonische Splinefunktionen. Veröffentlichungen des Geodatischen Instituts, RWTH Aachen, 1982. 33. 95 p.
10. *Forsberg R.* Modelling of the fine-structure of the geoid: methods, data requirements and some results // Surv Geophys, 1993. № 14. P. 403–418.

Благодарности. Выражаю благодарность Ю.М. Нейману и В.Б. Непоклонову за конструктивные замечания при подготовке статьи к печати.

Acknowledgments. I thank Yu.M. Neyman and V.B. Nepoklonov for their constructive comments.

REFERENCES

1. *Sugaipova L.S.* A few comments on using Molodensky's coefficients for calculating high anomalies. *Izvestiya vuzov «Geodezia i aerofotosyemka»*. Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying». 2017, 6: 17–24. [In Russian].
2. *Molodenskiy M.S.* *Osnovnye voprosy geodezicheskoi gravimetrii*. Main questions of geodetic gravimetry. Trudy CNIIGAiK. Proceedings of The Central Research Institute of Geodesy, Aerial Survey and Cartography. 1945, 42: 110 p. [In Russian].
3. *Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gurr T., Eiker A., Kusche J., Sanchez J., Han S.C.* Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. Journ. of Geodesy. 2007, 81: 17–38.
4. *Michel V.* Lectures on Constructive Approximation. Fourier, Spline, and Wavelet Methods on the Real Line, the Sphere, and the Ball. New York: Birkhäuser: Springer, 2013: 328 p.
5. *Tscherning C.C., Rapp R.H.* Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree-Variance Models. Department of Geodetic Science. Columbus (OH). The Ohio State University. Rep. 208. 1974: 94 p.
6. *Flury J.* Short-wavelength Spectral Properties of the Gravity Field from a Range of Regional Data Sets. Journ. of Geodesy. 2006, 79: 624–640.
7. *Freedon W., Fehlinger T., Klug M., Mathar D., and Wolf K.* Classical Globally Reflected Gravity Field Determination in Modern Locally Oriented Multiscale Framework. Journ. of Geodesy. 2009, 83 (12): 1171–1191.
8. *Holmes S.A., Featherstone W.E.* A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. Journ. of Geodesy. 2002, 76 (5): 279–299.
9. *Reuter R.* Über Integralformeln der Einheitssphäre und harmonische Splinefunktionen. Veröffentlichungen des Geodatischen Instituts, RWTH Aachen. 1982, 33: 95 p.
10. *Forsberg R.* Modelling of the fine-structure of the geoid: methods, data requirements and some results. Surv Geophys. 1993, 14: 403–418.