

# АСТРОНОМИЯ, ГРАВИМЕТРИЯ И КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.2

DOI: 10.30533/0536-101X-2018-62-2-127-131

## Об уточнении нормального поля

© 2018 г. Л.С. Сугаипова

Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия  
*leyla\_sugaipova@mail.ru*

## On refinement of the normal field

L.S. Sugaipova

Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia  
*leyla\_sugaipova@mail.ru*

Received December 4, 2017

Accepted March 30, 2018

**Keywords:** functionals on the potential, linearization and spherical approximation errors, normal field, the geodetic boundary value problem.

**Summary.** Errors arising due to linearization and spherical approximation of the fundamental equation of physical geodesy can be weakened by replacement of the standard normal field generated by an equipotential ellipsoid. A low-frequency part of one of the modern global models of the geopotential can be used as a new normal field. Here the iterative procedure of refinement of the standard normal field is described and the results of corresponding numerical experiments is shown. We have used here first 70 harmonics of the model GO\_CONS\_GCF2\_DIR\_R5 as a new normal field. We are given 6169 points by their geodetic coordinates  $B, L, h$ . These points are located all over the USA territory. Two sets of values of height anomaly and the disturbing potential — with reference to the WGS84 normal field and with reference to the new normal field — were calculated. Statistics of the experiment have shown that the values of the disturbing potential and height anomaly decrease more than by 28 times when using the new normal field. Therefore proposed refinement of a normal field can be of use when solving problems dealing with assumptions about smallness of disturbing potential, closeness of artificial telluroid to the real Earth etc. At the same time additional computing expenses are insignificant. The iterative procedure converges in two-three steps and do not take much computational capability and time.

---

**Citation:** Sugaipova L.S. On refinement of the normal field. *Izvestiya vuzov «Geodeziya i aerofotosyemka»*. Izvestia vuzov «Geodesy and Aerophotosurveying». 2018, 62 (2): 127–131. [In Russian]. DOI: 10.30533/0536-101X-2018-62-2-127-131.

---

Поступила 4 декабря 2017 г.

Принята к печати 30 марта 2018 г.

**Ключевые слова:** краевая задача геодезии, нормальное поле, погрешности линеаризации и сферической аппроксимации, функционалы на потенциале.

Описана и численно реализована итерационная процедура замены стандартного нормального поля, генерируемого уровенным эллипсоидом, низкочастотной частью одной из существующих глобальных моделей геопотенциала. Это позволяет ослабить погрешности, возникающие за счет разного рода аппроксимаций краевой задачи геодезии, и уменьшить значения возмущающего потенциала и аномалии высоты более чем в 28 раз.

---

**Для цитирования:** Сугаипова Л.С. Об уточнении нормального поля // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». 2018. Т. 62. № 2. С. 127–131. DOI: 10.30533/0536-101X-2018-62-2-127-131.

---

### Введение

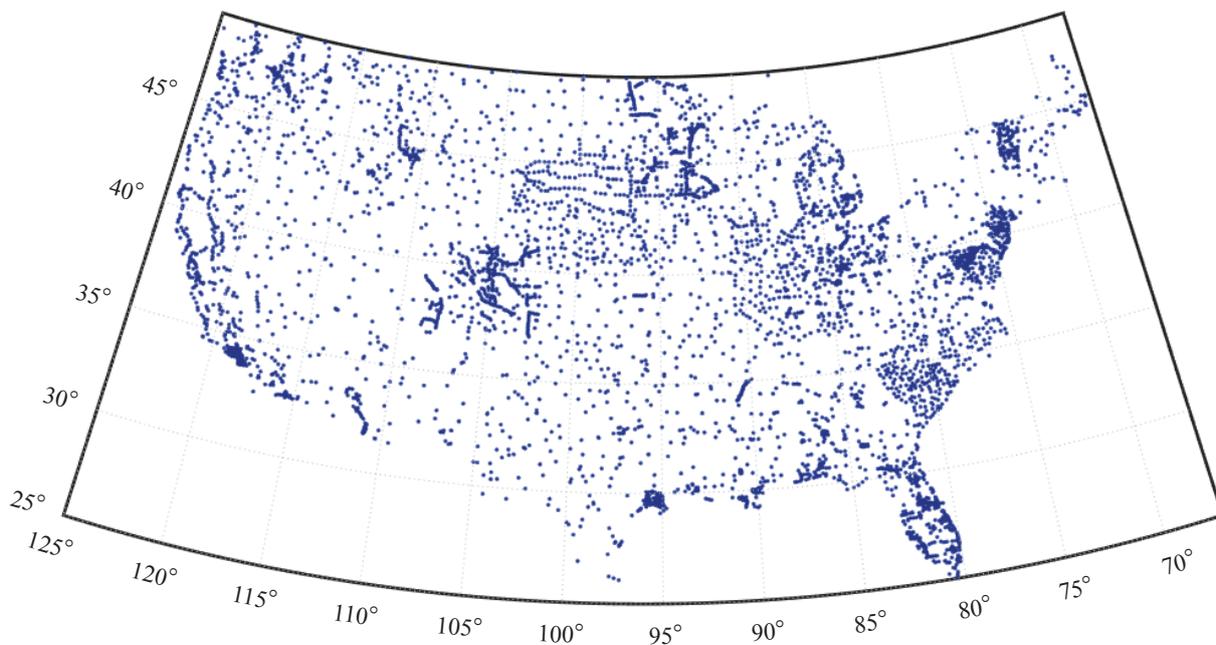
Естественно предположить, что при вычислении аномалий высоты по гравиметрической информации погрешности, возникающие за счет линеаризации соответствующей краевой задачи и сферической аппроксимации, можно заметно ослабить, если вместо стандартного нормального поля, генерируемого ровненным эллипсоидом, воспользоваться одной из существующих в настоящее время глобальных моделей геопотенциала, полученных по спутниковым данным. В настоящей работе мы попытались на конкретном примере построить новый возмущающий потенциал и геодезические функционалы на нем, оценить возможную эффективность указанного уточнения нормального поля и сопоставить эту эффективность с необходимыми для ее достижения численными затратами.

### Процедура уточнения нормального поля

В качестве исходных данных использованы находящиеся в открытом доступе геодезические широты  $B$ , долготы  $L$  и высоты  $h$  6169 пунктов  $P$ , разбросанных по территории США (широты 24–49°, долготы 235–293°) (ри-

сунок). Пользуясь одним из общепринятых нормальных полей WGS84 и моделью гравитационного поля Земли (ГПЗ) EGM2008 до 2190 степени, мы вычислили в этих точках аномалии высот  $\zeta$  и получили оценки нормальных высот  $H(P) = h(P) - \zeta$ . Тем самым получены геодезические высоты точек  $Q$  теллурида, соответствующего нормальному полю WGS84, поскольку  $h(Q) = H(P)$ . Кроме того, действительные потенциальные числа  $C(P)$  можно вычислить по формуле  $C(P) = H(P)\bar{\gamma}$ , так как по определению  $H(P) = C / \bar{\gamma}$ , где  $C = W_0 - W(P)$  — измеренная разность реальных потенциалов силы тяжести  $W$  на уровне моря и в точке  $P$  на поверхности Земли, а  $\bar{\gamma}$  — средняя нормальная сила тяжести вдоль соответствующей отвесной линии [1]. Тем же значениям  $C$  равны и нормальные потенциальные числа, т.е. приращения  $U_0 - U(Q)$  нормального потенциала в соответствующих точках теллурида относительно его значения на эллипсоиде. Это следует из известного условия подбора точек  $Q$ .

Введем теперь в рассмотрение новый нормальный потенциал как сумму низкочастотной части одной из современных моделей ГПЗ в виде конечного ряда по шаровым функциям и



Расположение 6169 пунктов на территории США  
Location of 6169 points in the territory of the USA

потенциала центробежной силы за счет вращения Земли:

$$\tilde{U}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \left[ \sum_{n=0}^N \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad (1)$$

где  $r, \theta, \lambda$  — сферические координаты;  $G$  — гравитационная постоянная;  $M$  — масса Земли;  $a$  — большая полуось эллипсоида;  $P_{nm}$  — полностью нормированные присоединенные функции Лежандра;  $c_{nm}$  и  $s_{nm}$  — гармонические коэффициенты  $n$ -й степени и  $m$ -го порядка ( $c_{00}=1, s_{00}=c_{10}=s_{10}=c_{11}=s_{11}=0$ );  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли; здесь и далее верхняя тильда  $\tilde{\phantom{x}}$  указывает на то, что речь идет о понятиях, связанных с новым нормальным полем.

Соответствующая нормальная сила тяжести представляет собой градиент потенциала. В локальной ориентированной на север системе координат (LNOF) имеем:

$$\tilde{\gamma} = \text{grad} \tilde{U} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} \vec{e}_\lambda + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Здесь единичные направляющие векторы  $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_r$  касательных к координатным линиям  $\theta, \lambda, r$  составляют ортонормированный базис локальной системы координат (LNOF), а единичные направляющие векторы  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  — ортонормированный базис глобальной геоцентрической системы координат Земли (ECEF). При этом

$$\begin{pmatrix} x^E \\ y^E \\ z^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \lambda & \sin \lambda & \sin \theta \cos \lambda \\ -\cos \theta \sin \lambda & -\cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^L \\ y^L \\ z^L \end{pmatrix},$$

где верхние индексы  $E$  и  $L$  указывают на принадлежность к системам координат ECEF и LNOF соответственно, и

$$|\tilde{\gamma}| = \sqrt{\left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} \right)^2 + \left( -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right)^2}. \quad (2)$$

Необходимые при этом производные по аргументам получаются обычным дифференцированием и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{GM}{a^2} \sum_{n=2}^N (n+1) \left( \frac{a}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) + r(\omega \sin \theta)^2;$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} = -\frac{GM}{a} \sum_{n=2}^N \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P'_{nm}(\cos \theta) \cdot \sin \theta + \frac{(r\omega)^2}{2} \sin 2\theta;$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda} = \frac{GM}{a} \sum_{n=2}^N \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n m (-c_{nm} \sin m\lambda + s_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}(\cos \theta).$$

Первую производную присоединенной функции Лежандра по  $\theta$  можно вычислить по формуле [2]

$$P'_{nm}(\theta) = \frac{1}{u} (ntP_{nm}(\theta) - f_{nm}P_{n-1,m}(\theta)), \quad \forall n \geq m, \quad (3)$$

где  $u = \sin \theta, t = \cos \theta, f_{nm} = \sqrt{\frac{(n^2 - m^2)(2n+1)}{2n-1}},$

или

$$P'_{nm}(\theta) = m \frac{t}{u} P_{nm}(\theta) - g_{nm} P_{n,m+1}(\theta), \forall n \geq m, \quad (4)$$

где  $g_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{\delta_m}}$ .

В формуле (4)  $\delta_m = 1$  для всех  $m > 0$  и только при  $m = 0$  надо положить  $\delta_0 = 2$ . Если  $m = n$ , то  $f_{mm} = g_{mm} = 0$  и соотношения (3) и (4) редуцируются к

$$P'_{mm}(\theta) = m \frac{t}{u} P_{mm}(\theta), \forall m \geq 0.$$

Что касается конкретного выбора нового нормального потенциала, мы остановились на первых 70 степенях модели GO\_CONS\_GCF2\_DIR\_R5 по двум причинам. Во-первых, эта модель получена прямым методом только по спутниковым данным GOCE, GRACE, LAGEOS [3] без сферической аппроксимации. Во-вторых, современные глобальные модели геопотенциала при сравнении показывают практически одинаковую точность в диапазоне частот, соответствующем степеням  $n = 2 \div 70$ . Это можно рассматривать как свидетельство того, что указанная часть спектра ГПЗ определена достаточно надежно, а соответствующие значения коэффициентов близки к реальным стоксовым постоянным. Сравнение выполнено в одной из более ранних работ автора. Таким образом, в предыдущих формулах  $N = 70$ .

Точки  $Q$  соответствующего нового теллуроида можно получить методом последовательных приближений. Для этого предположим, что  $h_0(\tilde{Q}) = H(P)$ , и в каждой точке  $\tilde{Q}$  выполним следующие действия: а) с помощью упомянутой модели GO\_CONS\_GCF2\_DIR\_R5 вычислим значение первого слагаемого правой части формулы (1), т. е. значение нового нормального потенциала сил притяжения; б) преобразуем геодезические координаты  $B(P), L(P), h_0(\tilde{Q})$  в прямоугольные  $x, y, z$  и вычислим центробежный потенциал  $0,5\omega^2(x^2 + y^2)$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли; в) складывая два последних результата, получим новый нормальный потенциал силы тяжести  $\tilde{U}(\tilde{Q})$ . Нижний индекс 0 обозначает нулевое приближение, а верхняя тильда  $\tilde{\phantom{x}}$  по-прежнему указывает, что речь идет о понятиях,

связанных с новым нормальным полем. Дробь

$$\Delta h(\tilde{Q}) = \frac{\tilde{U}(\tilde{Q}) - U(Q)}{\tilde{\gamma}(\tilde{Q})},$$

где  $U(Q) = U_0 - C$  — определяет превышение точки  $Q$  нового теллуроида над точкой  $Q$  теллуроида традиционного, поэтому  $h_1(\tilde{Q}) = h_0(\tilde{Q}) + \Delta h(\tilde{Q})$  задает новое приближение для геодезических высот нового теллуроида.

Далее процесс повторяется, доставляя очередные значения  $h_2(\tilde{Q}), h_3(\tilde{Q}), \dots$ . Однако практика показывает, что процесс сходится очень быстро, и двух–трех приближений обычно достаточно. Кроме того, вместо  $\tilde{\gamma}(\tilde{Q})$  можно пользоваться постоянным средним значением  $\bar{\gamma}$ , поскольку это не вносит практически погрешностей.

### Численный эксперимент

Мы проделали указанные вычисления для уже упомянутых 6169 пунктов на территории США. Показать подробности результатов довольно трудно из-за большого объема данных. В табл. 1, 2 приведены результаты вычислений для первых пяти пунктов. Однако статистические характеристики результатов вполне красноречивы. Так, аномалии высот  $\zeta$ , соответствующие традиционному нормальному полю, изменяются от  $\min = -39,63$  м до  $\max = -6,51$  м и имеют среднеквадратическое значение 28,36 м. То же для аномалий высот  $\tilde{\zeta}$ , соответствующих новому нормальному полю:  $\min = -4,67$  м,  $\max = 3,90$  м, среднеквадратическое значение 1,01 м. Таким образом, отличие нормальных высот (которые, как известно, отображаются на топографических картах) от геодезических высот реальной поверхности Земли уменьшилось более чем в 28 раз.

Новый возмущающий потенциал  $\tilde{T}$  определяем как разность реального и нового нормального потенциала в одной и той же точке, т.е.:

$$\tilde{T}(P) = W(P) - \tilde{U}(P) = W_0 - C - \tilde{U}(P).$$

Полученные значения оказались в пределах от  $\min = -41,46$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> до  $\max = 42,51$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>, среднеквадратическое значение равно 8,07 м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Те же показатели для возмущающего потенциала относительно традиционного нормального поля

составили:  $\min = -388,95 \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\max = -63,79 \text{ м}^2/\text{с}^2$ , среднее квадратическое значение —  $278,29 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Аномалии силы тяжести в терминах уточненного нормального поля можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}g(P) &= g(P) - \tilde{\gamma}(\tilde{Q}) = (\gamma(Q) + \Delta g(P)) - \tilde{\gamma}(\tilde{Q}) = \\ &= \Delta g(P) + (\gamma(Q) - \tilde{\gamma}(\tilde{Q})). \end{aligned}$$

Здесь  $g(P)$  и  $\tilde{\gamma}(\tilde{Q})$  вычисляются по формулам, аналогичным (2), где  $P$  и  $\tilde{Q}$  имеют координаты  $(B, L, h)$  и  $(B, L, h - \tilde{\zeta})$  соответственно.

Таблица 1

**Аномалии высоты  $\zeta$  относительно нормального поля WGS84 и  $\tilde{\zeta}$  относительно нового нормального поля для пяти пунктов на территории США**

Номер пункта	$B^\circ$	$L^\circ$	$h, \text{ м}$	$\zeta, \text{ м}$	$\tilde{\zeta}, \text{ м}$
1	40,780	268,883	175,929	-33,305	-0,617
2	33,384	275,716	240,700	-29,489	-1,293
3	33,379	275,704	242,379	-29,486	-1,300
4	41,298	277,794	209,857	-34,538	-0,235
5	41,296	277,794	210,055	-34,534	-0,232

Таблица 2

**Значения возмущающего потенциала  $T$  относительно нормального поля WGS84 и  $\tilde{T}$  относительно нового нормального поля для пяти пунктов на территории США**

Номер пункта	$B^\circ$	$L^\circ$	$h, \text{ м}$	$T, \text{ м}^2/\text{с}^2$	$\tilde{T}, \text{ м}^2/\text{с}^2$
1	40,780	268,883	175,929	-326,712	-1,759
2	33,384	275,716	240,700	-289,460	-8,380
3	33,379	275,704	242,379	-289,428	-8,451
4	41,298	277,794	209,857	-338,786	1,986
5	41,296	277,794	210,055	-338,749	2,014

### Заключение

Мы не предлагаем повсеместное изменение нормального поля, поскольку это привело бы к слишком большим проблемам организационного характера, однако при решении конкретных задач уточнение нормального поля может оказаться полезным. Примером может служить

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия // Пер. с англ. под ред. Ю.М. Неймана. М.: МИИГАиК, 2007. 410 с.
2. Holmes S.A., Featherstone W.E. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions // Journ. of Geodesy. 2002. V. 76. № 5. P. 279–299.
3. Bruinsma S.L., Forste C., Abrikosov O., Marty J.C., Rio M.H., Mulet S., Bonvalot S. The new ESA satellite – only gravity field model via the direct approach // Geophys. Research Letters. 2013. V. 40. № 14. P. 3607–3612.

широкий класс задач, связанных с упрощенным использованием теории Молоденского. Так, упрощения, позволяющие получать практически доступные решения классической краевой задачи Молоденского (перенос краевого условия с неизвестной поверхности Земли на модельную поверхность теллуроида, избавление от кривой производной и др.) основаны на предположении о малости возмущающего потенциала, близости искусственно построенного теллуроида к реальной поверхности Земли, малом сжатии Земли и т.п. Простейшим аналогом подобной ситуации можно считать стандартную линеаризацию нелинейной функции с помощью дифференциала в определенной окрестности заданной точки. При этом погрешность линеаризации пропорциональна радиусу упомянутой окрестности. При линеаризации краевой задачи Молоденского роль подобной окрестности играют аномалии высот. Эти же величины определяют и отличия нормальных высот, изображаемых на топографических картах, от высот геодезических. Поэтому предложенное уточнение нормального поля, уменьшающее среднее квадратическое значение аномалий высот в несколько десятков раз, следует признать вполне перспективным и достойным дальнейшей разработки. При этом дополнительные вычислительные затраты незначительны и вполне окупаемы.

**Благодарности.** Выражаю благодарность Ю.М. Нейману и В.Б. Непоклонову за конструктивные замечания при подготовке статьи.

**Acknowledgements.** I thank Yu.M. Neyman (МИИГАиК) and V.B. Nepoklonov (МИИГАиК) for their constructive comments during preparation of the article.

### REFERENCES

1. Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. Physical Geodesy. Springer Science&Business Media, 2006: 403 p. [In Russian].
2. Holmes S.A., Featherstone W.E. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. Journ. of Geodesy. 2002, 76 (5): 279–299.
3. Bruinsma S.L., Forste C., Abrikosov O., Marty J.C., Rio M.H., Mulet S., Bonvalot S. The new ESA satellite – only gravity field model via the direct approach. Geophys. Research Letters. 2013, 40 (14): 3607–3612.