

УДК 528.48

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

*Александр Михайлович Дегтярёв*

Полоцкий государственный университет, 211440, Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29,  
доцент кафедры геодезии и кадастров, e-mail: almide@tut.by

*Вадим Викторович Ялтыхов*

Полоцкий государственный университет, 211440, Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29,  
доцент кафедры прикладной геодезии и фотограмметрии, e-mail: vad311@rambler.ru

В статье рассмотрена задача восстановления геометрии прямоугольного объекта с оптимальной коррекцией по результатам координирования его четырех углов. Предложены два метода решения этой задачи:

- метод, основанный на решении системы уравнений связи координат четырех корректируемых точек с выбранными параметрами на основе метода наименьших квадратов;
- метод, основанный на решении систем уравнений путем прямой минимизации целевой функции методом обобщенного приведенного градиента с помощью процедуры «Поиск решения» в Excel.

**Ключевые слова:** метод наименьших квадратов, оптимизация, восстановление геометрии сооружения, поиск решения в Excel.

## OPTIMIZATION METHODS FOR ENGINEERING GEODESY PROBLEMS SOLUTION

*Alexander M. Degtyarev*

Polotsk State University, 211440, Belarus, Novopolotsk, 29 Blokhina St., Assoc. Prof., Department of Geodesy and Cadastres, e-mail: almide@tut.by

*Vadim V. Yal'tykhov*

Polotsk State University, 211440, Belarus, Novopolotsk, 29 Blokhina St., Assoc. Prof., Department of Applied Geodesy and Photogrammetry, e-mail: vad311@rambler.ru

The problem of rectangular object geometry restoration (with optimal correction) by the results of its four angles coordination is considered. Two techniques for this problem solution are offered:

- the technique based on the solution of combined equations for referring the coordinates of four points to be corrected to the chosen parameters based on the least squares method;
- the technique based on the combined equations solution with direct minimization of the objective function by generalized reduced gradient using the procedure of «search for solution» in Excel.

**Key words:** least squares method, optimization, restoration of structure geometry, search for solutions in Excel.

Роль и значение инженерной (прикладной) геодезии в развитии цивилизации известны и с течением времени все более возрастают [1–6]. В этой связи

особо актуальным стал вопрос оптимизации, в том числе автоматизации решения инженерно-геодезических задач [7, 8]. С целью дальнейшего развития данного направления рассмотрим математические основы этого вопроса.

Методы оптимизации процессов получили распространение в науке в конце XVIII – начале XIX в. благодаря работам Эйлера, Лагранжа и Коши. В геодезии с начала XIX в. оптимизация, в виде минимизации, получила широчайшее распространение в форме метода наименьших квадратов (МНК), после блестящих работ Гаусса, Лежандра, Лапласа и многих других. Основное использование метода того времени – это уравнительные вычисления. И только во второй половине XX в. ряд работ (см., например [9, 10, 11] и др.) показали возможность использования этого замечательного математического аппарата при обработке результатов других геодезических работ. К ним, в первую очередь, относят проектирование оптимальной оформляющей линии, или плоскости, оптимизацию при выверке положения прямолинейных и криволинейных плоских и пространственных конструкций и ряд других. Одна из таких задач, которая была сложно разрешима в недавнем прошлом и решаема на современном этапе развития измерительной и вычислительной техники, – это задача восстановления геометрии объектов прямоугольной формы с оптимальным передвижением исходных точек.

Пусть требуется восстановить геометрию прямоугольного объекта с минимальной коррекцией, по результатам координирования четырех углов объекта:  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$  – «измеренные» величины (рис. 1).

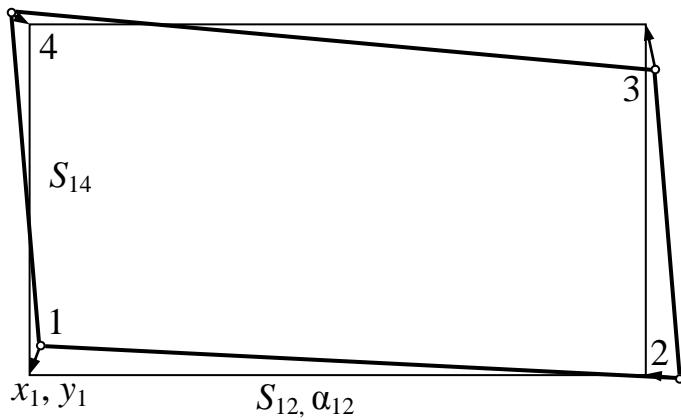


Рис. 1. Схема объекта и выбранные параметры

Очевидно, что перемещение в проектное состояние – прямоугольник – реальных точек 1, 2, 3 и 4 связано со сдвигом координированных точек объекта на некоторое расстояние и в некотором направлении.

Так как при решении поставленной задачи основное условие – минимальный сдвиг реальных точек для приведения объекта в проектное положение, целесообразно использовать математический аппарат оптимизации, или одну из

его самых популярных и разработанных реализаций в виде метода наименьших квадратов. В качестве реализации выберем метод наименьших квадратов в параметрической форме [12]. Для этого назначим необходимое количество параметров, которое должно равняться числу корректируемых точек. В качестве параметров предлагается выбрать координаты  $x$  и  $y$  первой точки  $(x_1, y_1)$ , директивное направление  $\alpha_{12}$  линии 1-2, длины  $S_{12}$  и  $S_{14}$  сторон 1-2 и 1-4, т. е. четыре элемента, через которые несложно выразить координаты корректируемых четырех точек углов объекта. При этом следует учитывать, что у проектного объекта (прямоугольника) углы прямые и стороны попарно равны. Тогда уравнения связи координат четырех корректируемых точек  $(X_i, Y_i)$  с выбранными параметрами будут иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{1-я точка } X_1 = x_1; \\ Y_1 = y_1; \\ \text{2-я точка } X_2 = x_1 + S_{12} \cdot \cos(\alpha_{12}); \\ Y_2 = y_1 + S_{12} \cdot \sin(\alpha_{12}); \\ \text{3-я точка } X_3 = x_1 + S_{12} \cdot \cos(\alpha_{12}) + S_{14} \cdot \cos(\alpha_{12} - 90); \\ Y_3 = y_1 + S_{12} \cdot \sin(\alpha_{12}) + S_{14} \cdot \sin(\alpha_{12} - 90); \\ \text{4-я точка } X_4 = x_1 + S_{14} \cdot \cos(\alpha_{12} - 90); \\ Y_4 = y_1 + S_{14} \cdot \sin(\alpha_{12} - 90). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Следуя схеме метода наименьших квадратов, линеаризуем систему уравнений связи (1) и перейдем к системе уравнений поправок

$$v = A \cdot \delta p + l, \quad (2)$$

где матрица плана  $A$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos(\alpha_{12}) & 0 & -S_{12} \cdot \sin(\alpha_{12}) \\ 0 & 1 & \sin(\alpha_{12}) & 0 & S_{12} \cdot \cos(\alpha_{12}) \\ 1 & 0 & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{12} - 90) & -S_{12} \cdot \sin(\alpha_{12}) - S_{14} \cdot \sin(\alpha_{12} - 90) \\ 0 & 1 & \sin(\alpha_{12}) & \sin(\alpha_{12} - 90) & S_{12} \cdot \cos(\alpha_{12}) + S_{14} \cdot \cos(\alpha_{12} - 90) \\ 1 & 0 & 0 & \cos(\alpha_{12} - 90) & -S_{14} \cdot \sin(\alpha_{12} - 90) \\ 0 & 1 & 0 & \sin(\alpha_{12} - 90) & S_{14} \cdot \cos(\alpha_{12} - 90) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

вектор поправок  $\delta p$  к вектору параметров  $p$  и вектор свободных членов  $l$  системы параметрических уравнений поправок, вектор поправок в «измеренные» координаты  $v$

$$\delta p = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta S_{12} \\ \delta S_{14} \\ \delta \alpha_{12} \end{bmatrix}; \quad l = \begin{bmatrix} X_1 - x_1 \\ Y_1 - y_1 \\ X_2 - x_2 \\ Y_2 - y_2 \\ X_3 - x_3 \\ Y_3 - y_3 \\ X_4 - x_4 \\ Y_4 - y_4 \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{x_3} \\ v_{y_3} \\ v_{x_4} \\ v_{y_4} \end{bmatrix}.$$

Вектор свободных членов  $l$  системы параметрических уравнений поправок является разностью вычисленных координат по приближенным значениям параметров  $p$  и уравнениям связи (1) и «измеренных» координат.

Далее, на основе обычной вычислительной схемы МНК, переходим от системы уравнений поправок (2) к совместной системе нормальных уравнений

$$A^T W A \cdot \delta p + A^T W l = N \cdot \delta p + b = 0. \quad (4)$$

Система (4) решается итеративно, при задании вектора приближенных значений параметров  $p^0 = (x_1^0 \quad y_1^0 \quad S_{12}^0 \quad S_{14}^0 \quad \alpha_{12}^0)^T$  и критерия остановки итераций  $\Delta$ . Вычислив уравненные параметры по (2), получаем поправки к «измерениям» – координатам и искомое положение проектной фигуры объекта, полученное из текущего исходного при условии минимальных подвижек.

Мы использовали полную линейную модель перемещения объекта с элементами перемещения вида: фиксация, разворот, сдвиг, масштаб. Если фиксировать (т. е. принять за неизменные) некоторые из определяемых выше элементов перехода, то можно получить ряд достаточно часто встречающихся в практике частных случаев:

1. Фиксируется положение одной точки, например  $(x_1, y_1)$ . Тогда процесс перехода объекта в проектное положение сводится к развороту относительно фиксируемой точки и масштабированию длинами.

2. Фиксируется одна или две длины. Тогда процесс преобразования объекта может быть сведен к сдвигу по осям  $x$  и  $y$  и развороту фиксированной части объекта.

3. Фиксируется ориентировка объекта. В этом случае переход будет осуществлен путем сдвига по осям  $x$  и  $y$  и развороту и масштабированию длинами и другими комбинациями.

Рассмотрим численный пример использования полученных формул. Имеем реальные координаты  $(X, Y)_i$  четырех углов объекта (табл. 1), который ранее представлял из себя прямоугольник.

Таблица 1

## Координаты углов объекта

№	X	Y
1	41,297	50,532
2	63,069	92,844
3	87,350	81,970
4	60,422	36,268

Выбираем параметры и задаем их приближенные значения

$$p^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & y_1^0 & S_{12}^0 & S_{14}^0 & a_{12}^0 \end{pmatrix}^T = (39\ 49\ 50\ 25\ 1)^T.$$

Используя уравнения связи (1), составляем по (2) матрицу плана  $A$  и вектор свободных членов  $l$

1	0	0	0	0	-2,297
0	1	0	0	0	-1,532
1	0	0,48755	0	-43,911 56	2,946 11
0	1	0,873095	0	24,520 91	-1,770 45
1	0	0,487555	0,873 09	-31,685 36	-0,298 11
0	1	0,87309	-0,48 755	46,415 34	-4,404 01
1	0	0	0,87 309	12,226 20	-0,385 22
0	1	0	-0,48 755	21,894 43	-0,775 56

 $A$  $l$ 

Весовую матрицу  $W$  примем равной единичной. Вычислив для (4) матрицу нормальных уравнений  $N$ , свободный член  $b$  и решив систему, получим поправки к параметрам, уравненные параметры, поправки к «измерениям» и уравненные «измерения». Для получения окончательного решения потребовалось две итерации. Конечные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

## Результаты решения задачи по методу наименьших квадратов

Уравненные параметры	Уравненные координаты		
	№	X	Y
$X_1$	39,827	1	39,827
$Y_1$	49,561	2	64,348
$S_2$	50,294	3	86,242
$S_1$	25,077	4	61,721
$\alpha$	1,0615		

Квадратичная форма  $v^T p v = 9,711\ 587\ 9$ .

Данную задачу можно решить прямой минимизацией целевой функции  $\Phi$ , например на основе достаточно часто используемого в практике и в множестве программных пакетов метода обобщенного приведенного градиента (ОПГ). Этот метод является развитием метода приведенного градиента (ПГ) (см. например [13]) который предложил Вульф (1963 г.) для задач линейного программирования с линейными ограничениями. Основная идея метода ОПГ состоит в том, чтобы сократить размерность задачи путем исключения зависимых (базисных) переменных и применить метод ПГ для определения направления спуска и в качестве критерия при установлении оптимальности.

Для решения рассмотренной задачи методами нелинейного программирования воспользуемся процедурой «Поиск решения» в Excel (рис. 2). Здесь исходные координаты помещены в ячейках B11:C14, приближенные значения неизвестных в ячейках D2:D7. В столбце I вычисляется значение  $\delta$  по формуле

$$\delta = \sqrt{(x_{\text{выч}} - x_{\text{изм}})^2 + (y_{\text{выч}} - y_{\text{изм}})^2}. \quad (5)$$

В ячейке F5 вычисляется  $\sum \delta^2$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									

**Параметры**

X1 =	39,000
Y1 =	49,000
$\alpha$ =	1,000
S1 =	25,000
S2 =	50,000

**Целевая функция**

39,6713721
------------

**Координаты**

№	X	Y
1	41,297	50,532
2	63,069	92,844
3	87,350	81,970
4	60,422	36,268

**Вычисленные координаты**

№	X	Y
1	39,000	49,000
2	66,015	91,074
3	87,052	77,566
4	60,037	35,492

**Отклонения**

№	X	Y	$\delta$
1	-2,297	-1,532	2,761
2	2,946	-1,770	3,437
3	-0,298	-4,404	4,414
4	-0,385	-0,776	0,866

Рис. 2. Запись данных модели для процедуры «Поиск решения»

При запуске функции «Поиск решения» появляется диалоговое окно (рис. 3), в котором необходимо указать ячейку с целевой функцией, ячейки с неизвестными параметрами, указать опции поиска целевой функции (минимум, максимум и др.) и метод решения.

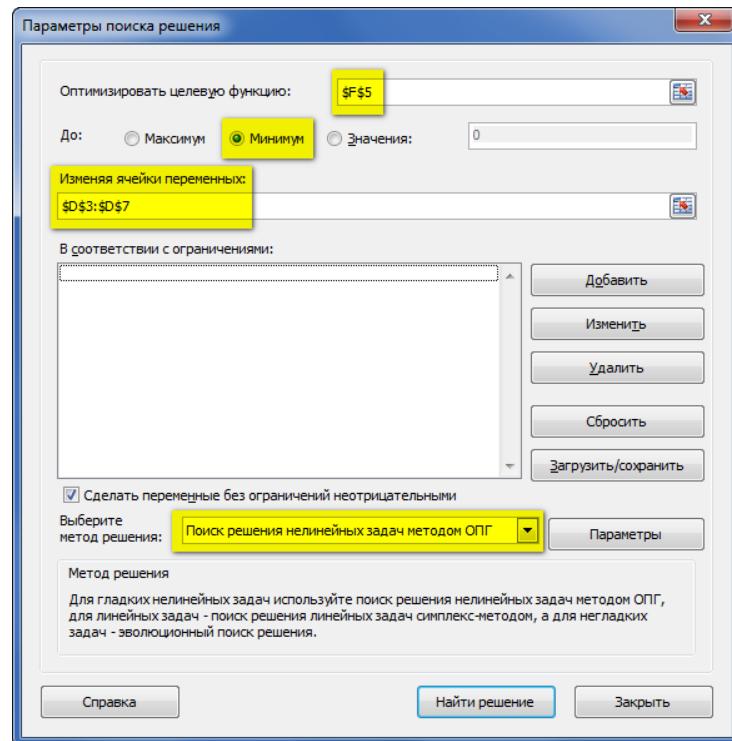


Рис. 3. Параметры процедуры «Поиск решения» для минимизации целевой функции

В закладке «Параметры» можно изменить установленные по умолчанию параметры поиска решения (рис. 4).

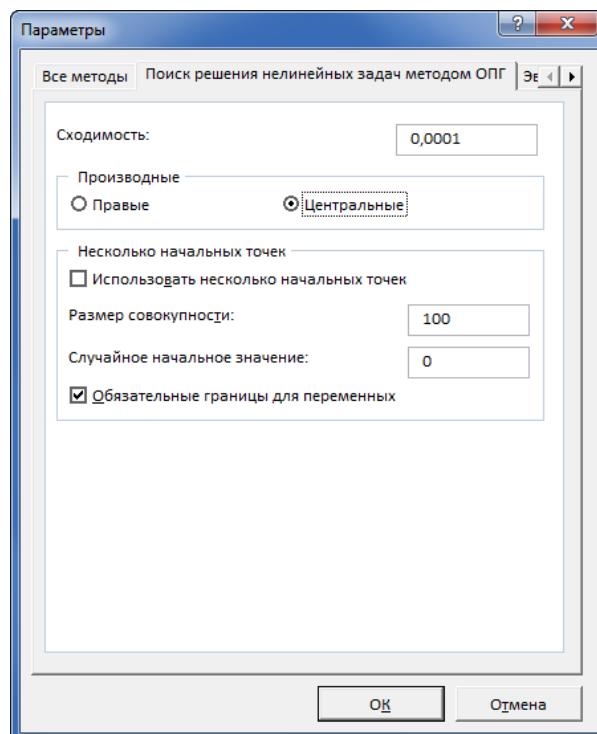


Рис. 4. Параметры процедуры «Поиск решения методом ОПГ»

В результате выполнения функции «Поиск решения» получаем следующие результаты (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
<i>Параметры</i>									
3	Xl =	39,827							
4	Yl =	49,561							
5	$\alpha$ =	1,062				9,7115879	Целевая функция		
6	Sl =	25,077							
7	S2 =	50,294							
8									
9	Координаты			Вычисленные координаты			Отклонения		
10	№	X	Y	№	X	Y	Dx	Dy	$\delta$
11	1	41,297	50,532	1	39,827	49,561	-1,470	-0,971	1,762
12	2	63,069	92,844	2	64,348	93,472	1,279	0,628	1,425
13	3	87,350	81,970	3	86,242	81,246	-1,108	-0,724	1,323
14	4	60,422	36,268	4	61,721	37,335	1,299	1,067	1,681

Рис. 5. Результаты минимизации целевой функции для четырех точек

Область сходимости целевой функции в данном примере достаточно большая. Решение, приведенное на рис. 5, было получено даже с начальными значениями параметров, равными нулю.

Восстановить геометрию прямоугольного объекта с применением функции «Поиск решения» в Excel также возможно при наличии координат только трех точек. Для решения этой задачи в столбце I удаляем значение  $\delta$  для исключенной точки (рис. 6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
<i>Параметры</i>									
3	Xl =	41,571							
4	Yl =	50,395							
5	$\alpha$ =	1,108				0,7908373	Целевая функция		
6	Sl =	26,889							
7	S2 =	48,130							
8									
9	Координаты			Вычисленные координаты			Отклонения		
10	№	X	Y	№	X	Y	Dx	Dy	$\delta$
11	1	41,297	50,532	1	41,571	50,395	0,274	-0,137	0,307
12	2	63,069	92,844	2	63,039	93,472	-0,030	0,628	0,629
13	3	87,350	81,970	3	87,105	81,479	-0,245	-0,491	0,549
14	4	60,422	36,268	4	65,637	38,402	5,215	2,134	

Рис. 6. Результаты минимизации целевой функции для трех точек

Графическое отображение полученных решений приведено на рис. 7, где черным цветом показан прямоугольник, полученный по 4 точкам, синим и красным – по 3 точкам, исключая поочередно точки 3 и 4.

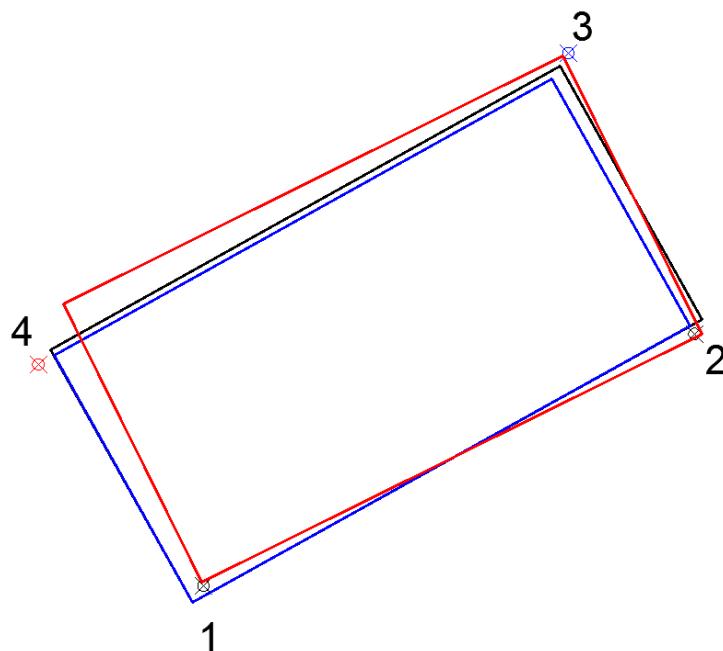


Рис. 7. Графическое представление полученных решений

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Комплексное обследование гидротехнических сооружений на Чардаринском водохранилище / С. Г. Ожигин, Ж. С. Нукужинов, Е. Н. Хмырова, Н. А. Имракова, М. Б. Ингемберлина // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 4 (28). – С. 13–18.
2. Статистическое исследование перемещений подпорных стенок по результатам геодезических измерений / Р. В. Шульц, А. А. Анненков, А. М. Хайлак, В. С. Стрилец // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 3 (27). – С. 35–53.
3. Абжапарова Д. А. Математическая обработка инженерно-геодезических сетей в стереографической проекции Гаусса // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 2 (26). – С. 27–32.
4. Сальников В. Г. Современная методика выноса главных осей турбоагрегатов // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 1 (25). – С. 27–33.
5. Зверев Л. А., Мошенжал А. В. О роли метода георадиолокации при полевом обследовании стройплощадок в инженерных изысканиях // Вестник СГГА. – 2014. – Вып. 1 (25). – С. 54–59.
6. Никонов А. В. Особенности применения современных геодезических приборов при наблюдении за осадками и деформациями зданий и сооружений объектов энергетики // Вестник СГГА. – 2013. – Вып. 4 (24). – С. 12–18.
7. Ловягин В. Ф. Идентификация системы проектирования оптимальных трасс // Вестник СГГА. – 2004. – Вып. 9. – С. 36–42.
8. Хорошилов В. С. Оптимизация выбора методов и средств геодезического монтажа технологического оборудования // Вестник СГГА. – 2006. – Вып. 11. – С. 117–124.
9. Димов Л. Применение способа наименьших квадратов к определению наиболее подходящих оформляющих прямых и плоскостей. – М.–Л.: Стройиздат, 1956. – 140 с.

10. Видуев Н. Г., Гржбовский В. П. Геодезическое проектирование вертикальной планировки. – М.: Недра, 1964. – 210 с.
11. Баран П. И. Геодезические работы при монтаже и эксплуатации оборудования. – М.: Недра, 1990. – 233 с.
12. Маркузе Ю. И., Бойко Е. Б., Голубев В. В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей. Справ. пособие. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
13. <http://iasa.org.ua/lections/iso/6/6.7.htm>

Получено 10.02.2015

© A. M. Дегтярёв, B. B. Ялтыхов, 2015